
Aufgabe 1 : Orthochrone Galilei-Gruppe **(schriftlich)**

Eine eigentliche (orthochrone) Galilei-Transformation im euklidischen Raum ist definiert durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= R\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}t + \boldsymbol{a}\,, \\ t' &= t + b\,, \end{aligned}$$

wobei R eine orthogonale Matrix mit $\det R = +1$ darstellt. Der Vektor $\boldsymbol{v}$ beschreibt eine gleichförmige geradlinige Bewegung, $\boldsymbol{a}$ und b konstante Verschiebungen in Raum bzw. Zeit. Die Menge aller Abbildungen lässt sich durch die Elemente

$$g = (R, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, b)$$

beschreiben. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Menge aller orthochronen Galilei-Transformationen eine Gruppe bildet.

a) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung zweier Transformationen g_1 und g_2 gegeben ist durch

$$g' = g_2 \circ g_1 = (R_2R_1, R_2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, R_2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{v}_2 b_1 + \boldsymbol{a}_2, b_2 + b_1)\,.$$

Stellt g' wieder eine Galilei-Transformation dar? (2 Punkte)

b) Das neutrale Element g_e ist gegeben durch

$$g_e = (1, 0, 0, 0)\,.$$

Berechnen Sie damit das inverse Element g^{-1}. (2 Punkte)

c) Beweisen Sie das Assoziativgesetz (2 Punkte)

$$g_3 \circ (g_2 \circ g_1) = (g_3 \circ g_2) \circ g_1\,.$$

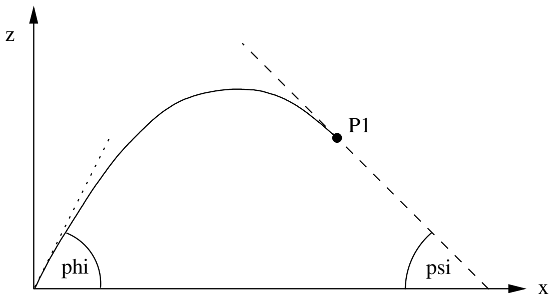
Aufgabe 2 : Periodendauer im eindimensionalen Potenzial

Ein Massenpunkt befindet sich in einem eindimensionalen Potenzial $V(x)$. Er beschreibe eine periodische Bewegung mit den Umkehrpunkten x_1 und x_2. Zeigen Sie, ausgehend vom Energieerhaltungssatz, dass für die Periodendauer T gilt: (1 Punkt)

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}\,.$$

Aufgabe 3 : Schiefer Wurf mit vorgegebenem Ziel

Ein Massenpunkt wird im homogenen Schwerefeld der Erde vom Ursprung aus mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel φ gegen die Horizontale abgeworfen.



a) Wie muss v_0 in Abhängigkeit von φ gewählt werden, damit ein vorgegebener Punkt $P_1(x_1, z_1)$ getroffen wird? (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Abschussgeschwindigkeit minimal wird, wenn für den zugehörigen Winkel $\tan 2\varphi = -x_1/z_1$ gilt. Wie groß ist diese Minimalgeschwindigkeit? (2 Punkte)

c) Der Winkel zwischen der Vertikalen und der Sichtlinie vom Ursprung zu P_1 sei α. Zeigen Sie, dass α für den Fall minimaler Abschussgeschwindigkeit durch die Abschussrichtung gerade halbiert wird, also dass $\alpha = 2(\pi/2 - \varphi)$ gilt. (1 Punkt)

d) Berechnen Sie für den Fall minimaler Abschussgeschwindigkeit die Geschwindigkeit beim Auftreffen am Punkt P_1 und den Auftreffwinkel ψ. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$ gilt. (2 Punkte)

Aufgabe 4 : Teilchen im eindimensionalen Morse-Potenzial

Ein Massenpunkt der Masse m und Energie E bewege sich in einem eindimensionalen Morse-Potenzial

$$V(x) = V_0(e^{-2ax} - 2e^{-ax}) \,, \qquad V_0, a > 0 \text{ und } E > -V_0.$$

a) Skizzieren Sie den Potenzialverlauf und das Phasenporträt. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Umkehrpunkte der Bewegung. Wann verläuft sie periodisch? Bestimmen Sie für diesen Fall die Schwingungsdauer T des Teilchens. (2 Punkte)

   Hinweis: Verwenden Sie das Resultat aus Aufgabe 2.

c) Geben Sie eine Näherung für $V(x)$ nahe dem Minimum an. Was für eine Bewegung erhält man also für kleine Auslenkungen? (1 Punkt)

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am Montag, den 24.10. in der Vorlesung.

Zusätzliche Informationen zur Vorlesung

Übungen: Die Vorlesung wird ergänzt durch wöchentlich stattfindende Übungen, deren Termin(e) in der Vorlesung abgestimmt werden.

Für jede Übung ist ein Übungsblatt zu bearbeiten, das auf der Webseite der Vorlesung verfügbar ist und am folgenden Übungstermin besprochen wird. Sollte es Fragen zu den Übungsaufgaben geben, stehen die Übungsleiter unter den auf der Webseite angegebenen Adressen oder in ihren Büros zur Verfügung.

Auf den Übungsblättern sind die beiden Aufgabentypen „schriftlich“ (ebenso gekennzeichnet) und “mündlich” (ohne weitere Kennzeichnung) zu finden.

- Die mündlichen Aufgaben sind bis zur jeweiligen Übung zu bearbeiten in der Art, dass sie der Gruppe vollständig, verständlich und mit den nötigen Erklärungen vorgestellt werden können.
- Die schriftlichen Aufgaben sind an dem auf dem Übungsblatt angegebenen Termin in der Vorlesung abzugeben.

  Es wird erwartet, dass die Lösungen verständlich und mit ausreichend Erklärungen abgegeben werden. Die Übungsleiter behalten sich vor, die Punkte für nicht ausreichend dokumentierte Lösungen erst nach einer entsprechenden Korrektur zu vergeben. (Richtlinie ist, dass ein/e Student/in auf Niveau der Vorlesung den präsentierten Lösungsweg ohne vorherige Kenntnis der Lösung nachvollziehen und verstehen kann. Eine simple Aneinanderreihung von Rechenschritten ist demnach *nicht* ausreichend.)

Sollte die Teilnahme an einzelnen Übungsterminen nicht möglich sein, sind die entsprechenden Aufgaben *vorher* beim Übungsleiter abzugeben.

Scheinkriterien: Ein Übungsschein wird zum Semesterende an diejenigen Teilnehmer/innen ausgestellt, die

(i) Mindestens 60% der Punkte der zu votierenden Übungsaufgaben erreicht haben,

(ii) Mindestens 60% der Punkte der schriftlichen Übungsaufgaben erreicht haben, und

(iii) Aktiv an den Übungen teilgenommen haben. Dazu gehört das mindestens zweimalige Vorrechnen von Übungsaufgaben.

Prüfung: Die Vorlesung wird abgeschlossen durch eine entsprechende Prüfung. Der (die) Termin(e) sowie weitere Informationen werden rechtzeitig bekannt gegeben. Inhalt der Prüfung ist der gesamte Vorlesungsstoff sowie der Inhalt der Übungen. Zur Prüfung zugelassen sind diejenigen Vorlesungsteilnehmer/innen, die nach obigen Kriterien den Übungsschein erworben haben.