Übungen zur Vorlesung Theoretische Physik LA 1 **WS 2016/17**

Apl. Prof. Dr. J. Main **Blatt 10**

Aufgabe 35 : Das Kastenpotenzial

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das in einem Kasten mit den Kantenlängen a, b und c eingeschlossen ist. Das Potenzial ist also

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Geben Sie die allgemeine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right)\psi(x,y,z) = E\,\psi(x,y,z)$$

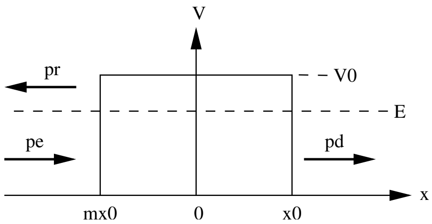
im Innenbereich an. Verwenden Sie dazu $\psi(x,y,z) = \psi_1(x)\,\psi_2(y)\,\psi_3(z)$ als Separationsansatz. Im Außenbereich muss die Wellenfunktion verschwinden. Daraus folgen die Randbedingungen $\psi(x=0,y,z)=0$, $\psi(x=a,y,z)=0$ und entsprechend für y und z. Geben Sie damit die erlaubten Energieeigenwerte und die dazugehörigen normierten Wellenfunktionen des Teilchens an. Welchen Wert erhalten Sie für die Nullpunktsenergie? (3 Punkte)

b) Betrachten Sie nun einen würfelförmigen Kasten mit $a = b = c$. Geben Sie die 6 niedrigsten Energieeigenwerte und deren Entartungsgrad an und skizzieren Sie das Eigenwertspektrum. (2 Punkte)

Aufgabe 36 : Tunneleffekt, Resonanz **(schriftlich)**

Eine von links kommende Teilchenwelle mit $0 < E < V_0$ falle auf ein Potenzial der Form

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & |x| \le x_0 \quad (V_0 > 0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



a) Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung mit dem Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_e(x) + \psi_r(x) & = e^{\mathrm{i}kx} + \beta\, e^{-\mathrm{i}kx} & x < -x_0 \\ \psi_i(x) & = \gamma\, e^{-\kappa x} + \delta\, e^{\kappa x} & |x| \le x_0 \\ \psi_d(x) & = \alpha\, e^{\mathrm{i}kx} & x > x_0 \end{cases}$$

und bestimmen Sie die Parameter κ und k (mit $\kappa, k > 0$). Zeigen Sie, dass für die Tunnelwahrscheinlichkeit $T = \alpha^*\alpha$ gilt. Bestimmen Sie aus den Anschlussbedingungen die Amplitude α und berechnen Sie T. (3 Punkte)

b) Geben Sie Näherungsformeln für T an für die Grenzfälle $\kappa x_0 \ll 1$ und $\kappa x_0 \gg 1$. (1 Punkt)

c) Betrachten Sie nun den Fall $E > V_0$. Geben Sie die Amplitude α für diesen Fall an und berechnen Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit T. Für welche Werte E ergibt sich vollständige Transmission ($T = 1$)? Skizzieren Sie $T(E)$ für den Bereich von $E = 0$ bis $E \gg V_0$ und diskutieren Sie den Unterschied zu einem klassischen Teilchen. (2 Punkte)

Hinweis: Ersetzen Sie κ durch $\mathrm{i}k_0$

Aufgabe 37 : Zwei-Niveau-System

Für ein Zwei-Niveau-System sei der Gesamtoperator

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}, \qquad \lambda \text{ reell}$$

gegeben. In der Eigenvektorbasis von $\hat{H}_0$

$$\begin{aligned} \hat{1} &= |e_1\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2| \\ \hat{H}_0\,|e_i\rangle &= E_i^0\,|e_i\rangle \end{aligned}$$

nehmen die einzelnen Operatoren folgende Gestalt an:

$$\mathsf{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1^0 & 0 \\ 0 & E_2^0 \end{pmatrix}; \quad \mathsf{V} = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix}, \qquad K \text{ reell}$$

a) Lösen Sie die Eigenwertgleichung

$$\hat{H}\,|i\rangle = E_i\,|i\rangle, \qquad i = 1, 2$$

indem Sie die Vektoren $|i\rangle$ nach den Eigenvektoren von $\hat{H}_0$ entwickeln: (2 Punkte)

$$|i\rangle = \sum_{j=1}^{2} c_{ij}\,|e_j\rangle\,.$$

b) Skizzieren Sie die λ-Abhängigkeit der Eigenwerte für $E_1^0 = E_2^0$ und $E_1^0 \neq E_2^0$. Diskutieren Sie das Verhalten der Eigenvektoren. (2 Punkte)

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am Montag, den 16.1. in der Vorlesung.