
Aufgabe 41 : Zwei-Niveau-System (zeitabhängig)

In Aufgabe 37 wurde bereits das zeitunabhängige Zwei-Niveau-System behandelt und die Eigenvektoren $|i\rangle$ zum Gesamthamiltonoperator $\hat{H}$ berechnet:

$$|i\rangle = \sum_j c_{ij} |e_j\rangle \,, \text{ wobei } \hat{H}_0 |e_j\rangle = E_j^0 |e_j\rangle$$

Die Energieeigenwerte von $\hat{H}$ aus

$$\hat{H} |i\rangle = E_i |i\rangle \,, \quad i = 1,2$$

waren:

$$E_{1/2} = E_M \pm \Delta E, \text{ mit } E_M = \frac{E_1^0 + E_2^0}{2} \text{ und } \Delta E = \frac{\sqrt{(E_1^0 - E_2^0)^2 + |\lambda K|^2}}{2}$$

a) Geben Sie die Zeitentwicklung eines Zustandes $|\varphi(t)\rangle$ an, indem Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung formal integrieren. Der Hamiltonoperator sei dabei explizit zeitunabhängig. Anfangsbedingung ist $|\varphi(t=0)\rangle = |\varphi_0\rangle$. (2 Punkte)

b) Stellen Sie $|\varphi(t)\rangle$ in der ungestörten Basis $|e_i\rangle$ dar. (1 Punkt)

c) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $\left|\langle e_i|\varphi(t)\rangle\right|^2$ in den ungestörten Zuständen. Nach welcher Zeit ist das System erstmalig vollständig im Zustand $|e_2\rangle$? Mit welcher Frequenz oszilliert das System zwischen den Zuständen $|e_1\rangle$ und $|e_2\rangle$? Verwenden sie $|\varphi_0\rangle = |e_1\rangle$ und $c_{11} = c_{12} = c_{21} = -c_{22} = 1/\sqrt{2}$. (2 Punkte)

d) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Systems in den Zuständen $|e_i\rangle$ der ungestörten Basis. (1 Punkt)

Aufgabe 42 : Harmonischer Oszillator

Der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\, \hat{x} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{m\omega}}\, \hat{p} \right) \\ \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\, \hat{x} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{m\omega}}\, \hat{p} \right) \end{aligned}$$

Für die Eigenzustände $|n\rangle$ $(n = 0, 1, \dots)$ gilt:

$$\begin{aligned} \hat{a}\,|n\rangle &= \sqrt{n}\;|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger\,|n\rangle &= \sqrt{n+1}\;|n+1\rangle \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Matrixelemente $\hat{a}_{nn'} = \left\langle n \;\middle|\; \hat{a} \;\middle|\; n' \right\rangle$ und $\hat{a}^\dagger_{nn'} = \left\langle n \;\middle|\; \hat{a}^\dagger \;\middle|\; n' \right\rangle$. Wie sehen die entsprechenden Matrizen aus? (1 Punkt)

b) Drücken Sie Orts- und Impulsoperator durch $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ aus und geben Sie deren Matrixelemente $x_{nn'}$ und $p_{nn'}$ an. (1 Punkt)

c) Der Erwartungswert eines Operators $\hat{A}$ im Zustand $|n\rangle$ ist durch das Diagonalelement A_{nn} in der Matrixdarstellung gegeben. Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{x}^2$ und $\hat{p}^2$. (2 Punkte)

d) Berechnen Sie die Orts- und Impulsunschärfe im Zustand $|n\rangle$ und zeigen Sie, dass die Eigenzustände des harmonischen Oszillators die Heisenbergsche Unschärferelation

$$(\Delta x)_n\,(\Delta p)_n \geq \frac{\hbar}{2}$$

erfüllen. (2 Punkte)