
Aufgabe 47 : Drehimpulsoperatoren

Die Drehimpulsoperatoren $\hat{J}_i$ erfüllen die folgenden Vertauschungsrelationen:

$$\left[\hat{J}_i, \hat{J}_j\right] = \mathrm{i}\hbar \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k \tag{1}$$

Dabei ist ε_{ijk} der vollkommen antisymmetrische Levi-Civita-Tensor. Der Operator $\hat{J}_z$ vertauscht mit dem Operator $\hat{\boldsymbol{J}}^2$. Sie besitzen demnach dieselben Eigenzustände:

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2 \left|\lambda m\right\rangle = \lambda\hbar^2 \left|\lambda m\right\rangle , \quad \hat{J}_z \left|\lambda m\right\rangle = m\hbar \left|\lambda m\right\rangle$$

Im folgenden sollen die Eigenwerte λ und m bestimmt werden.

a) Die Leiteroperatoren $\hat{J}_\pm$ sind definiert durch:

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$$

Beweisen Sie die Kommutatorrelationen

$$\left[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm\right] = \pm\hbar\hat{J}_\pm, \quad \left[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm^n\right] = \pm n\hbar\hat{J}_\pm^n, \quad \left[\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_\pm\right] = 0$$

b) Zeigen Sie: Ist $\left|\lambda m\right\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{J}_z$ zum Eigenwert $m\hbar$, dann ist $\hat{J}_\pm \left|\lambda m\right\rangle$ ebenfalls Eigenzustand von $\hat{J}_z$ mit dem Eigenwert $(m \pm 1)\hbar$. Was ergibt sich für den Zustand $\hat{J}_\pm^n \left|\lambda m\right\rangle$?

c) Beweisen Sie die Ungleichung $-\sqrt{\lambda} \leq m \leq \sqrt{\lambda}$. Die Eigenwerte $m\hbar$ sind folglich nach oben und unten beschränkt. Es gibt also einen Zustand mit maximalem m, $\left|\lambda, m_{max}\right\rangle$, und minimalem m, $\left|\lambda, m_{min}\right\rangle$. Was folgt daraus für $\hat{J}_+ \left|\lambda, m_{max}\right\rangle$ und $\hat{J}_- \left|\lambda, m_{min}\right\rangle$?

d) Drücken Sie den Operator $\hat{J}_-\hat{J}_+$ durch $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ aus. Was folgt aus $\hat{J}_-\hat{J}_+ \left|\lambda, m_{max}\right\rangle = 0$ und $\hat{J}_+\hat{J}_- \left|\lambda, m_{min}\right\rangle = 0$ für die Eigenwerte $\lambda\hbar^2$, $m_{max}\hbar$ und $m_{min}\hbar$?

e) Zeigen Sie, dass m_{max} nur halb- oder ganzzahlige Werte annehmen kann.

Aufgabe 48 : Matrixdarstellung, Pauli-Matrizen

Der Zustand $|jm\rangle$ sei ein gemeinsamer Eigenzustand von $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ und $\hat{J}_z$ und erfülle die Eigenwertgleichungen

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2 \, |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 \, |jm\rangle \,, \quad \hat{J}_z \, |jm\rangle = m\hbar \, |jm\rangle$$

a) Drücken Sie $\hat{J}_x$ und $\hat{J}_y$ durch $\hat{J}_\pm$ aus und geben Sie die folgenden Matrixelemente an

$$\langle j'm'| \, \hat{J}_z \, |jm\rangle \,, \quad \langle j'm'| \, \hat{J}_\pm \, |jm\rangle \,, \quad \langle j'm'| \, \hat{J}_x \, |jm\rangle \,, \quad \langle j'm'| \, \hat{J}_y \, |jm\rangle$$

b) Für $j = 1/2$ lässt sich der Operator darstellen als $\boldsymbol{J} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ mit

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Komponenten die Vertauschungsrelationen in Gl. (1) erfüllen.

c) Für ein System mit $j = 1/2$ sollen die Eigenzustände mit $|+\rangle = \left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle$ und $|-\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ bezeichnet werden. Diese beiden Zustände bilden die Basis einer Matrixdarstellung

$$|+\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |-\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie sehen die Matrixdarstellungen für $\hat{J}_\pm$, $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ und $\hat{J}_z$ aus? Drücken Sie die Matrizen $\mathsf{J}_{x,y,z}$ durch die Paulischen Spinmatrizen $\sigma_{x,y,z}$ aus.

Aufgabe 49 : Spin-Präzession

In dieser Aufgabe soll ein Spin-1/2 System mit dem magnetischen Moment $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \gamma\hat{\boldsymbol{S}}$ betrachtet werden, das sich in einem äußeren Magnetfeld befindet. Der Hamiltonoperator ist dann

$$\hat{H} = -\gamma \, \hat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{B}$$

Gehen Sie von einem statischen, homogenen B-Feld in z-Richtung aus, $\boldsymbol{B} = (0, 0, B_z)$, und bestimmen Sie die Zeitentwicklung des Zustand $|\varphi\rangle_t$ für die Fälle

1. $|\varphi\rangle_{t=0} = |+\rangle$
2. $|\varphi\rangle_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$.

Was folgt jeweils für die Erwartungswerte $\langle \hat{S}_x \rangle_t$, $\langle \hat{S}_y \rangle_t$ und $\langle \hat{S}_z \rangle_t$?