Aufgabe 5 : Elektrostatik: Randwertprobleme, Greensche Identitäten

Wendet man den Gaußschen Satz auf das Vektorfeld an, das sich aus den skalaren Feldern ϕ und ψ gemäß $\psi \nabla \phi$ ergibt, so erhält man den 1. Greenschen Satz:

$$\int_V \left[\, \phi(\boldsymbol{r})\, \Delta_{\boldsymbol{r}} \Psi(\boldsymbol{r}) + (\nabla_{\boldsymbol{r}} \phi(\boldsymbol{r})) \cdot (\nabla_{\boldsymbol{r}} \Psi(\boldsymbol{r})) \,\right] \mathrm{d}^3 r = \oint_{S(V)} \phi(\boldsymbol{r}) \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}^2 f.$$

a) Gegeben seien nun zwei skalare Felder $\varphi_1(\boldsymbol{r})$ und $\varphi_2(\boldsymbol{r})$, die beide die Differentialgleichung

$$\Delta \varphi_i(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}) \quad \text{mit } i = 1{,}2 \qquad \text{(Poisson–Gleichung)}$$

im Volumen V erfüllen. Auf der Oberfläche $S(V)$ gelte

$$\varphi_1(\boldsymbol{r}) = \varphi_2(\boldsymbol{r}) \qquad \text{(Dirichletsche Randbedingungen).}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des 1. Greenschen Satzes, dass dann

$$\varphi_1(\boldsymbol{r}) \equiv \varphi_2(\boldsymbol{r}) \quad \text{in } V$$

gilt. (3 Punkte)

Hinweis: Identifizieren Sie $u = \varphi_1 - \varphi_2$ mit ϕ und Ψ.

b) Zeigen Sie zusätzlich die folgenden Identitäten: (1 Punkt)

$$\nabla_{\boldsymbol{r}} \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}^3 r' = - \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \mathrm{d}^3 r' \,,$$

$$\nabla_{\boldsymbol{r}} \times \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}^3 r' = \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \mathrm{d}^3 r' \,.$$

Aufgabe 6 : Feld einer homogen geladenen Kugel

Berechnen Sie das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ einer homogen geladenen Kugel

a) im Außenraum (1.5 Punkte)

b) im Innenraum (1.5 Punkte)

Aufgabe 7 : Integralsätze (schriftlich)

Gegeben sei ein Zylinder der Höhe $2L$ mit dem Radius R. Der Mittelpunkt des Zylinders bilde den Koordinatenursprung.

a) Führen Sie passende Parametrisierungen ein und berechnen Sie das vektorielle Flächenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ der Zylinderoberfläche (Mantel und Stirnflächen!). (2 Punkte)

b) Berechnen Sie ohne Benutzung des Gauß'schen Satzes den Fluss des Vektorfeldes

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \alpha \boldsymbol{r} \quad (\alpha = \mathrm{const})$$

durch die Zylinderoberfläche. (2 Punkte)

c) Bestätigen Sie mithilfe des Gauß'schen Satzes das Ergebnis aus Teil b). (1 Punkt)

d) Zeigen Sie die Gültigkeit des Stokes'schen Integralsatzes für die Mantelfläche. (2 Punkte)

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am Dienstag, den 25.04.2017, in der Vorlesung.