
Aufgabe 8 : Eigenschaften der Diracschen δ-Funktion und der Fouriertransformation

Die δ-Funktion $\delta(x-a)$ ist definiert durch $f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x$. Zeigen Sie die folgenden Relationen:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x = -f'(a)$ (1 Punkt)

b) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ (1 Punkt)

Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist über

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\exp(-\mathrm{i}kx)$$

definiert, die zugehörige inverse Transformation $\mathcal{F}^{-1}$ über

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, F(k)\exp(\mathrm{i}kx).$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe von $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\}$, dass

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\,\exp(\mathrm{i}k(x-x_0))$$

eine Darstellung der δ-Funktion ist. (1 Punkt)

d) Welche Bedingungen müssen die Funktion $f(t)$ und ihre Ableitung $f'(t)$ erfüllen, damit gilt:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = \mathrm{i}k\mathcal{F}\{f(x)\}.$$

(1 Punkt)

Hinweis: Benutzen Sie gegebenenfalls partielle Integration!

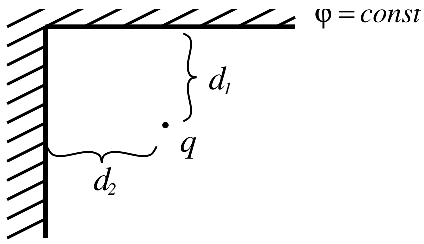
Aufgabe 9 : Zur Methode der Bildladungen

a) Zeigen Sie, dass für eine Ladungsverteilung, die die Eigenschaft $\rho(x,y,z) = -\rho(x,y,-z)$ besitzt, die Ebene $z = 0$ eine Äquipotentialfläche ist. (1.5 Punkte)

b) Benutzen Sie diese Eigenschaft, um das Potential einer Ladungsverteilung im Halbraum $z > 0$ zu bestimmen, falls ein konstantes Potential auf der Ebene $z = 0$ vorgegeben ist. (0.5 Punkte)

c) Behandeln Sie explizit den Fall einer Punktladung im Abstand d von der Ebene bei $z = 0$. (0.5 Punkte)

d) Bestimmen Sie das Potential für die abgebildete Ladungsanordung. (0.5 Punkte)



Aufgabe 10 : Neutrales Wasserstoff-Atom **(schriftlich)**

Das zeitlich gemittelte elektrostatische Potential eines neutralen Wasserstoffatoms lautet

$$\phi(r) \; = \; \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a}\, e^{-2r/a} \left(1 + \frac{a}{r}\right) . \tag{1}$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Poisson Gleichung $\Delta\phi = -\rho/\epsilon_0$ aus dem vorgegebenen Potential die Ladungsdichte $\rho(r)$. (2 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten für $r \neq 0$. Entwickeln Sie ϕ für $r \to 0$. Ergänzen Sie damit Ihr Resultat.

b) Interpretieren Sie das im Aufgabenteil a) gewonnene Ergebnis. Welche physikalische Bedeutung hat die Konstante a? Berechnen Sie die Gesamtladung Q innerhalb einer Kugel mit Radius R. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Kraft $\boldsymbol{F} = e\,\nabla\phi$, die von einem neutralen Wasserstoffatom auf ein zusätzliches Elektron im Abstand R ausgeübt wird und vergleichen Sie diese mit der Kraft, die vom Proton alleine auf das zusätzliche Elektron ausgeübt wird. Skizzieren Sie $F(R)$ für die beiden Fälle. (1 Punkt)

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am Dienstag, den 02.05.2017, in der Übung.