Übungen zur Vorlesung Theoretische Physik für LA 2 **SS 2017**

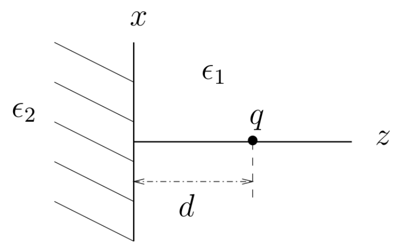
Apl. Prof. Dr. J. Main **Blatt 4**

Aufgabe 11 : Methode der Bildladungen

Berechnen Sie das Potential mit Hilfe der Methode der Bildladungen für die folgenden zwei Fälle:

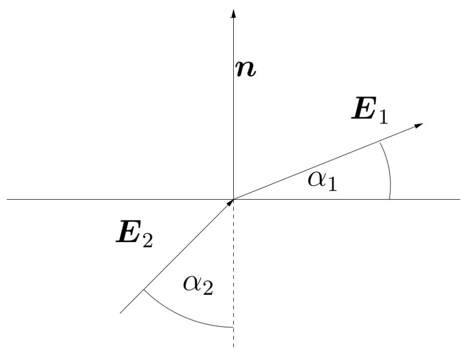
a) Eine Punktladung q befinde sich am Ort $\boldsymbol{r}$ außerhalb einer geerdeten, leitenden Kugel mit Radius R. Der Mittelpunkt der Kugel liege im Koordinatenursprung.(1.5 Punkte)

b) Eine Punktladung q befindet sich in einem Halbraum der Dielektrizitätskonstante ϵ_1. Ihr Abstand von der Grenzfläche, die diesen Halbraum von einem anderen mit der Dielektrizitätskonstante ϵ_2 trennt, sei d. Die Grenzfläche liege, wie in der Abbildung angedeutet, in der Ebene $z = 0$. (2 Punkte)



Aufgabe 12 : Brechungsgesetz der Elektrostatik

Betrachten Sie eine ebene Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika ϵ_1, ϵ_2 ohne Grenzflächenladung σ. $\boldsymbol{E}_1$ bzw. $\boldsymbol{E}_2$ seien die Felder an der Grenzfläche im Medium 1 bzw. Medium 2.



In welcher Beziehung stehen die Winkel α_1 und α_2 zueinander? (2 Punkte)

Aufgabe 13 : Magnetostatik **(schriftlich)**

Betrachten sie eine kreisförmige Leiterschleife (Stromfaden) mit Radius R in der Ebene $z = 0$. Die Stromdichte lautet in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z):

$$\boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{r}) = I\delta(\rho - R)\,\delta(z)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$$

Aus Symmetriegründen nimmt das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ folgende Gestalt an: $\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{r}) = A\,(\rho, z)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$.

a) Geben Sie anhand der formalen Gleichung $\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ eine Formel für $A\,(\rho, z)$ an. Betrachten sie hierfür die y-Komponente von $\boldsymbol{A}$ für $\varphi = 0$. (1 Punkt)

b) Schätzen Sie $A\,(\rho, z)$ in der Mitte der Leiterschleife $\rho \ll R$ mithilfe passender Taylor-Entwicklungen ab. *Zwischenergebnis*: $A\,(\rho, z) = \frac{\mu_0 I}{4}\frac{R^2\rho}{(R^2+z^2)^{3/2}}$ (1 Punkt)

c) Was ergibt sich für $A\,(\rho, z)$ für den Fall $\rho \gg R$? Zeigen Sie, dass sich $\boldsymbol{A}$ auf die Form $\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$ bringen lässt und bestimmen sie das magnetische Dipolmoment $\boldsymbol{m}$. *Zwischenergebnis*: $A\,(\rho, z) = \frac{\mu_0 I}{4}\frac{R^2\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$ (1.5 Punkte)

d) Zeigen Sie mithilfe des Gradienten in Zylinderkoordinaten, das sich die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ in folgender Form berechnen lässt: (1 Punkt)

$$\boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{r}) = -\hat{\boldsymbol{e}}_\rho\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho A\,(\rho, z)\right) + \hat{\boldsymbol{e}}_z\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A\,(\rho, z)\right)$$

e) Berechnen Sie die magnetische Induktion für die beiden Grenzfälle $\rho \ll R$ und $\rho \gg R$. (1 Punkt)

Aufgabe 14 : Multipolentwicklung mit Kugelflächenfunktionen

Die Multipolentwicklung einer beliebigen begrenzten Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$ wird in kartesischen Koordinaten für höhere Ordnungen schnell sehr unübersichtlich. Eine Alternative bietet die Entwicklung in Kugelflächenfunktionen. Diese geht aus von der Identität

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\alpha).$$

Dabei ist α der Winkel zwischen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$, P_l sind die Legendre-Polynome und es sei $r' < r$, d.h. wir interessieren uns für das Potential im Außenraum der begrenzten Ladungsverteilung. Die Legendre-Polynome hängen mit den Kugelflächenfunktion Y_{lm} über folgendes Additionstheorem zusammen:

$$P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi).$$

Dabei sind θ und ϕ (θ' und ϕ') die Polar- und Azimutalwinkel der Vektoren $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ in Kugelkoordinaten.

a) Berechnen Sie die Multipolmomente q_{lm} der Ladungsverteilung ρ, die durch

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\boldsymbol{r}) = \int d^3r' \frac{\rho\,(\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1}\frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta,\phi) q_{lm}$$

definiert werden. (1 Punkt)

b) In kartesischen Koordinaten sind Monopol- (Q), Dipol- (p_i) und Quadrupolmomente (Q_{ij}) definiert gemäß

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}')d^3r', \qquad p_i = \int x_i'\rho(\mathbf{r}')d^3r', \qquad Q_{ij} = \int (3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij})\rho(\mathbf{r}')d^3r' \ .$$

Drücken Sie die Multipolmomente q_{lm} für $l = 0,1,2$ und $m = -l,\ldots,l$ durch die entsprechenden kartesischen Momente aus. Die ersten Kugelflächenfunktionen lauten:

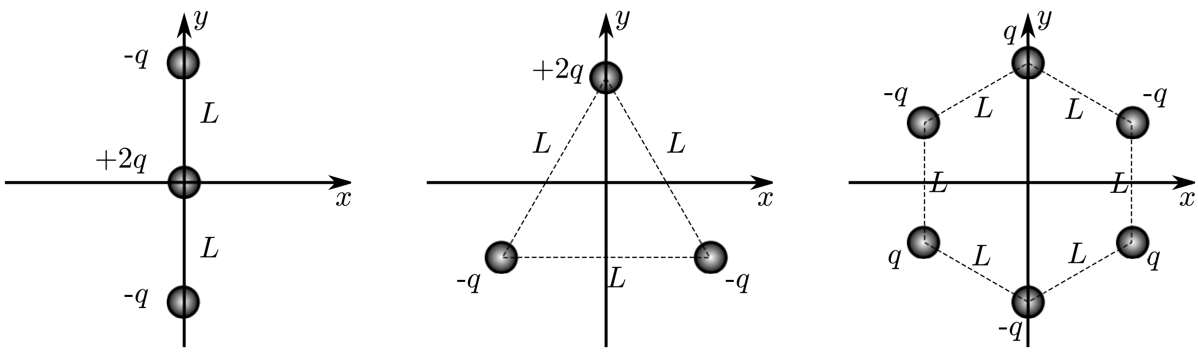
$$Y_{00} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2} \qquad Y_{20} = \left(\frac{5}{4\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_{10} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2}\cos\theta \qquad Y_{21} = -\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{e}^{i\phi}$$

$$Y_{11} = -\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2}\sin\theta\,\mathrm{e}^{i\phi} \qquad Y_{22} = \frac{1}{4}\left(\frac{15}{2\pi}\right)^{1/2}\sin^2\theta\,\mathrm{e}^{2i\phi}$$

sowie $Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{lm}^*$. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie Monopol-, Dipol- und Quadrupolmomente in kartesischen Koordinaten, jeweils auf den Schwerpunkt bezogen, für die drei skizzierten Anordnungen von Punktladungen. (2 Punkte)



Abgabe der schriftlichen Aufgabe am Dienstag, den 9.5.2017, in der Übung.