
Aufgabe 18 : Elektromagnetische Wellen in Materie

Betrachten Sie ein unendlich ausgedehntes, homogenes, elektrisch neutrales Medium, das durch die Dielektrizitätskonstante ϵ, die Permeabilität μ und die Leitfähigkeit σ charakterisiert ist. Das elektromagnetische Feld wird dann durch die Maxwell-Gleichungen in Materie

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 0\,, \qquad \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0\,,$$
$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{j}\,, \qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = 0$$

und durch die Materialgleichungen

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0\epsilon\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu_0\mu\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$$

bestimmt.

a) Zeigen Sie, dass sowohl die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ als auch die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ der Telegraphengleichung genügen

$$\Delta\boldsymbol{E} = \alpha\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} + \beta\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E},$$
$$\Delta\,\boldsymbol{H} = \alpha\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H} + \beta\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H},$$

und geben Sie die Konstanten α, β in Abhängigkeit der Materialparameter ϵ, μ, σ an. (1 Punkt)

b) Setzen Sie die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ als ebene Welle an:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}.$$

Zeigen Sie nun:

i) Die elektromagnetischen Wellen im leitenden Medium sind transversal, d.h. die Amplituden $\boldsymbol{E}_0$ und $\boldsymbol{H}_0$ stehen senkrecht auf dem Wellenvektor $\boldsymbol{k}$.

ii) Die Beträge von elektrischer und magnetischer Feldstärke sind verschieden.

iii) Leiten Sie die Dispersionsrelation

$$\boldsymbol{k}^2 = \frac{\omega^2\,\mu}{c^2}\,\eta\,,$$

ab und bestimmen Sie die verallgemeinerte komplexe Dielektrizitätskonstante η. (2 Punkte)

c) Führen Sie den komplexen Brechungsindex $N = n + \mathrm{i}\kappa$ mit $N^2 = \mu\eta$ ein und bestimmen Sie dessen Realteil, den Brechungsindex n und dessen Imaginärteil, den Absorptionskoeffizienten κ. (2 Punkte)

d) Betrachten Sie eine sich in x–Richtung bewegende ebene Welle:

   i) Zeigen Sie, das die Welle für $\sigma > 0$ exponentiell abklingt.

   ii) Bestimmen Sie die Eindringtiefe $d = d(\omega)$ in das Medium, d.h. diejenige Strecke, nach der die Welle auf das $1/e$–fache ihres ursprünglichen Wertes abgefallen ist.

   iii) Was ergibt sich für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle? (2 Punkte)

Aufgabe 19 : Bewegung eines Teilchens (schriftlich)

Eine zirkular polarisierte monochromatische elektromagnetische Welle im Vakuum sei durch das Feld

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = E_0\,(\cos(kz-\omega t),\, \sin(kz-\omega t), 0)^{\mathrm{T}}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die zugehörige magnetische Induktion $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$. (1 Punkt)

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung eines punktförmigen Teilchens der Ladung q und Masse m auf, das sich in diesem elektromagnetischen Feld $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ bewegt. Zeigen Sie, dass aus der Bedingung konstanter Energie $\boldsymbol{E}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 0$ folgt und verwenden Sie dies. (1.5 Punkte)

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung. Das Teilchen befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Koordinatenursprung und bewege sich mit der Geschwindigkeit v in z-Richtung, seine Energie bleibe konstant. Welche Bahn beschreibt das Teilchen? (2.5 Punkte)

Aufgabe 20 : Gleichförmige Bewegung eines geladenen Teilchens, Tscherenkow–Strahlung

Die Liénard-Wiechert Potentiale eines Teilchens mit Ladung q und Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ sind gegeben durch:

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}(t')|}\,\frac{1}{|\kappa(\boldsymbol{r},t')|}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{v}\,\varphi(\boldsymbol{r},t')$$

mit

$$\kappa(\boldsymbol{r},t') = 1 - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}(t'))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}(t')|}.$$

Dabei ist t' implizit durch die Gleichung $t = t' + \frac{1}{c}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}(t')|$ gegeben.

a) Die Bahnkurve des Teilchens sei $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t$ mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$. Zeigen Sie, dass

$$(t-t') = \frac{1}{(c^2-v^2)}\left(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v} \pm |\boldsymbol{x}|c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2(\alpha)\right)^{1/2}\right) \tag{1}$$

gilt, wobei $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{v}t$ und α den Winkel zwischen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{v}$ darstellt. (2 Punkte)

Hinweis: Führen Sie $\boldsymbol{x}$ noch vor dem Quadrieren der impliziten Gleichung ein.

b) Zeigen Sie, dass sich für $v < c$ das folgende Potential ergibt:

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{x}(t)|}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2(\alpha)\right)^{-1/2} \tag{2}$$

In diesem Fall gibt das Teilchen keine Strahlung ab. (2 Punkte)

Am Dienstag, den 23.5.2017, wird die Übung durch eine zusätzliche Vorlesung ersetzt. Zum Ausgleich entfällt die Vorlesung am Freitag, den 26.05.2017.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am Dienstag, den 23.5.2017, in der Vorlesung. Besprechung der Aufgaben am Dienstag, den 30.5.2017, in der Übung.