
Aufgabe 23 : Raum–Zeit–Diagramm

Ein Astronaut startet an einem Neujahrstag von der Erde aus zum Fixstern α-Centauri (4 Lichtjahre entfernt) und fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}8c$. Mit seinem auf der Erde verbliebenen Bruder hat er vor dem Start ausgemacht, dass sie sich gegenseitig über Radartelefon an jedem Neujahrstag Grüße schicken.

a) Wieviele Botschaften schickt jeder dem anderen und wann treffen diese ein? (2 Punkte)

b) Veranschaulichen Sie die Situation: Zeichnen Sie dazu ein Raum-Zeit-Diagramm mit den Weltlinien des Astronauten sowie der abgesandten Radarsignale. (2 Punkte)

Aufgabe 24 : Lorentz–Kovarianz der Maxwell–Gleichungen (schriftlich)

Die einzelnen Komponenten der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und der magnetischen Feldstärke $\boldsymbol{B}$ können als Elemente des antisymmetrischen elektromagnetischen Feldstärketensors F aufgefaßt werden. Dessen kontravariante Komponenten $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ mit $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ sind definiert durch

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & +B_y \\ E_y/c & +B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Berechnen Sie die kovarianten Komponenten des elektromagnetischen Feldstärketensors gemäß

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}F^{\sigma\rho}$$

mit Hilfe der kovarianten Minkowski-Metrik $(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. (1 Punkt)

b) Der duale elektromagnetische Felstärketensor $\hat{F}$ ist durch Kontraktion des elektromagnetischen Felstärketensors F mit dem vollständig antisymmetrischen Levi-Civita-Tensors $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$ definiert. Geben Sie explizit die kontravarianten Komponenten des dualen elektromagnetischen Felstärketensors an: (1 Punkt)

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}F_{\sigma\rho}.$$

c) Zeigen Sie, dass sich die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \qquad\qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

mit Hilfe des dualen elektromagnetischen Feldstärketensors $\hat{F}$ gemäß

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{2}$$

zusammenfassen lassen und dass das selbe für die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad\qquad \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

durch

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \tag{3}$$

möglich ist. (Hierbei ist $(j^\nu) = (c\rho, j_x, j_y, j_z)^T$ die Viererstromdichte aus der Ladungsdichte ρ und den Komponenten der Stromdichte $\boldsymbol{j}$.) (2 Punkte)

d) Leiten Sie aus Gl. (3) ab, dass die Viererstromdichte der Kontinuitätsgleichung $\partial_\nu j^\nu = 0$ genügen muss. (1 Punkt)

e) Führen Sie nun eine Lorentz-Transformation vom ursprünglichen Inertialsystem S in ein dazu gleichförmig bewegtes Inertialsystem S' durch: $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$. Der elektromagnetischen Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ ist ein Vierertensor zweiter Stufe. Leiten Sie die resultierenden Transformationsformeln für die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und für die magnetische Felstärke $\boldsymbol{B}$ für eine Lorentz-Transformation in x–Richtung (siehe Aufgabe 21) ab:

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}), \qquad\qquad \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}).$$

(2 Punkte)

Aufgabe 25 : Viererpotential

a) Leiten Sie aus den homogenen Maxwell-Gleichungen ab, dass sich die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{B}$ durch Differentiation aus einem skalaren Potential ϕ und einem Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ ableiten lassen:

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad\qquad \boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{4}$$

(1 Punkt)

b) Setzen Sie (4) in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (3) ein und bestimmen Sie die resultierenden gekoppelten Bewegungsgleichungen für das skalare Potential ϕ und für das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ unter den lokalen Eichtransformationen

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}, \qquad\qquad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \operatorname{grad}\chi$$

invariant sind. (1 Punkt)

d) Das skalare Potential ϕ und das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ lassen sich zu einem Vierervektorpotential mit den kontravarianten Komponenten

$$(A^\mu) = (\phi/c, A_x, A_y, A_z)^T$$

zusammenfassen. Zeigen Sie durch Vergleich von (1) mit (4), dass zwischen dem elektromagnetischen Feldstärketensor und dem Vierervektorpotential folgender Zusammenhang besteht:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{5}$$

Hinweis: Die kontravarianten Komponenten ∂^μ des Vierernablaoperators ergeben sich dabei aus den kovarianten Komponenten ∂_μ durch Heraufziehen des Index, $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu$ mit der kontravarianten Minkowski-Metrik $(\eta^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. (1 Punkt)

e) Zeigen Sie, dass damit die homogenen Maxwell-Gleichungen (2) automatisch erfüllt sind. (1 Punkt)

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am Dienstag, den 13.6.2014, in der Übung.