Übungen zur Vorlesung Theoretische Physik für LA 2 **SS 2017**

Apl. Prof. Dr. J. Main **Blatt 11**

Aufgabe 33 : Thermodynamik eines Gummifadens

Bei einem Gummifaden wird folgender Zusammenhang zwischen der Länge L, der Zugkraft Z und der Temperatur T festgestellt:

$$L = L_0 + \frac{\alpha Z}{T}.$$

Dabei sind L_0 und α Konstanten. Die Zugkraft $Z = mg$ werde durch ein angehängtes Gewicht der Masse m realisiert. Zum Erwärmen des Fadens um die Temperaturdifferenz $1\,\mathrm{K}$ bei fester Länge $L = L_0$ benötigt man, unabhängig von der Ausgangstemperatur, die konstante Wärmemenge $C > 0$.

a) Zeigen Sie, dass die Wärmekapazität des Fadens bei konstanter Länge L weder von der Temperatur T noch von dessen Länge L abhängt. (1.5 Punkte)

b) Berechnen Sie die innere Energie $U(T,L)$ und die Entropie $S(T,L)$. Wie lauten die Adiabatengleichungen $T = T(L)$ und $Z = Z(L)$? (1.5 Punkte)

c) Skizzieren Sie die Isothermen und Adiabaten in einem Z-L-Diagramm. (0.5 Punkte)

d) Berechnen Sie die Wärmekapazität C_Z bei konstanter Belastung Z. (1 Punkt)

e) Bei konstanter Belastung Z verkürzt sich der Faden bei Erwärmung von T_1 auf $T_2 > T_1$. Welcher Bruchteil β der zugeführten Wärme wird dabei durch Heben des Gewichtes in mechanische Arbeit umgewandelt? (1.5 Punkte)

f) Der Faden wird wärmeisoliert von L_1 auf $L_2 > L_1$ gedehnt. Steigt oder sinkt dabei seine Temperatur? (0.5 Punkte)

Aufgabe 34 : Legendre-Transformation **(schriftlich)**

Gegeben seien die extensiven Größen S,V,N und die Fundamentalrelation $U(S,V,N)$.

a) Geben Sie die differentielle Form $\mathrm{d}U(S,V,N)$ der Fundamentalrelation an.

Der Satz unabhängiger Variablen soll auf T,V,N geändert werden. Geben Sie die Fundamentalrelation U sowie deren zugehöriges totales Differential in diesem neuen Variablensatz an.

Warum steckt in $U(T,V,N)$ *nicht* mehr die vollständige, thermodynamische Information? (2.5 Punkte)

b) Durch eine Legendre-Transformation

$$F(T,V,N) = U(S(T,V,N),V,N) - TS(T,V,N)$$

soll nun eine Funktion $F(T,V,N)$ gefunden werden, die die vollständige, thermodynamische Information beinhaltet. Welcher Zusammenhang muss dazu zwischen F und S gelten? (1 Punkt)

c) Wie viele thermodynamische Potentiale können auf diese Art aus vollständigen Variablensätzen der Variablen S,V,N,T,p,ν gebildet werden? Geben Sie diese und die zugehörigen totalen Differentiale an. (2 Punkte)

d) Die Legendre-Transformation aus Aufgabenteil b) besitzt eine wichtige Analogie in der klassischen Mechanik. Geben Sie die entsprechenden analogen Größen zu U,F,T,S an. (0.5 Punkte)

Aufgabe 35 : Binomial- und Gauß-Verteilung

Die Wahrscheinlichkeit $W(n)$ dafür, dass ein durch die Wahrscheinlichkeit p charakterisiertes Ereignis bei N Versuchen n-mal eintritt, ist durch die Binomialverteilung gegeben:

$$W(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}\, p^n\, q^{N-n} \qquad \text{mit} \quad q = 1-p$$

Für die Gaußsche Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt (siehe auch ehemaliger Zehn-Mark-Schein):

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

a) Berechnen Sie die ersten zwei Momente $<n>$ und $<n^2>$ sowie die Varianz σ^2 für die Binomialverteilung. (2 Punkte)

Hinweis: Binomialsatz:

$$(p+q)^N = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!}\, p^n\, q^{N-n}$$

b) Berechnen Sie die ersten zwei Momente sowie die Varianz für die Gaußverteilung. (2 Punkte)

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi} \qquad\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

c) Wenn N sehr groß wird, weist die Binomialverteilung bei einem bestimmten Wert $n = \bar{n}$ ein ausgeprägtes Maximum auf und fällt dann für $n \neq \bar{n}$ rasch ab. In der Umgebung von $\bar{n}$ gilt:

$$|W(n+1) - W(n)| \ll W(n)$$

Das heißt $W(n)$ kann in guter Näherung als eine stetige Funktion der kontinuierlichen Variable n angesehen werden, und die Stelle $n = \bar{n}$ des Maximums ist dann näherungsweise bestimmt durch die Bedingung:

$$\left.\frac{dW}{dn}\right|_{\bar{n}} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \left.\frac{d\ln(W)}{dn}\right|_{\bar{n}} = 0$$

Entwickeln Sie $\ln(W(n))$ um $\bar{n}$ in eine Taylorreihe bis zum quadratischen Glied und zeigen Sie mit

$$\ln(n!) \approx n\ln(n) - n \quad \text{für} \quad n \gg 1$$

dass sich eine Verteilung $W(n)$ mit der Gestalt der Gauß-Verteilung ergibt. (3 Punkte)

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am Dienstag, den 4.7.2014, in der Übung.