
Aufgabe 36 : Unbestimmtheitsmaß

Diskutieren Sie das Unbestimmtheitsmaß eines 2-Zustands-Modells

$$S = -k_B \sum_{i=1}^{2} W_i \, \ln W_i .$$

Hierbei gibt W_i die Wahrscheinlichkeit an, dass sich das System im Zustand i befindet, d.h. es gilt $W_1 + W_2 = 1$. In welchem Wertebereich liegt S? Wann wird das Maximum bzw. Minimum angenommen? (1 Punkt)

Aufgabe 37 : Harmonischer Oszillator

a) Diskutieren Sie die Kurve $H(q,p) = E$ im Phasenraum für den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit der Hamiltonfunktion (1 Punkt)

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} q^2 .$$

b) Berechnen Sie das Phasenraumvolumen $\phi(E) = \int dq \int dp \; \Theta(E - H(q,p))$, das von dieser Kurve eingeschlossen wird. Bestimmen Sie aus $N = \phi(E)/(2\pi\hbar)$ für $E \gg \hbar\omega$ die Anzahl N der Zustände mit einer Energie unterhalb von E. Wie viele Zustände mit einem Energieeigenwert $E_r \leq E$ ergibt die exakte quantenmechanische Lösung? (2 Punkte)

Aufgabe 38 : Der Gleichverteilungssatz und der klassische eindimensionale harmonische Oszillator (schriftlich)

Die Energie des klassischen eindimensionalen harmonischen Oszillators ist gegeben durch:

$$E(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} q^2 .$$

a) Für dieses System mit unendlich vielen Freiheitsgraden geht die Zustandsumme in ein Zustandsintegral über gemäß:

$$Z = g_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \, e^{-E(q,p)/kT}$$

Dabei ist g_0 eine (unbekannte) Normierungskonstante. Berechnen Sie das Zustandsintegral. (2 Punkte)

b) Geben Sie die freie Energie $F = -kT \ln Z$ und die innere Energie $U = kT^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \ln Z\right)$ an. Bestimmen Sie daraus die Entropie $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ und die Wärmekapazität $C = \frac{\partial U}{\partial T}$ an. Entsprechen U und C Ihren Erwartungen (Gleichverteilungssatz)? (2 Punkte)

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$w(q,p) = g_0 e^{-E(q,p)/kT}/Z$$

im Phasenraum an und bestimmen Sie daraus die Wahrscheinlichkeitsdichte im Ortsraum

$$w(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \, w(q,p)$$

und im Impulsraum

$$w(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q \, w(q,p).$$

Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \, E(q,p) \, w(q,p).$$

(2 Punkte)

Aufgabe 39 : Großkanonisches Ensemble

Das großkanonische Ensemble beschreibt den Gleichgewichtszustand bei vorgegebener Temperatur T und vorgegebenem chemischen Potential μ.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die großkanonische Zustandssumme Z und das großkanonische Potential Ω an. (1.5 Punkte)

b) Berechnen Sie mit Hilfe des großkanonischen Potentials Ω die mittlere Teilchenzahl $\bar{N}$ und die mittlere Energie $\bar{E}$ des Systems. (1 Punkt)

c) Berechnen Sie für das ideale Gas explizit dessen Zustandssumme Z_{IG} und dessen großkanonisches Potential Ω_{IG}. Zeigen Sie, dass aus letzterem das ideale Gasgesetz folgt. (3 Punkte)

   Hinweis: Bestimmen Sie dazu die mittlere Teilchenzahl $\bar{N}$ und den Druck des idealen Gases.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe am Dienstag, den 11.7.2017, in der Übung.