Übungen zur Vorlesung „Relativitätstheorie, Astrophysik, Kosmologie (Vertiefungsmodul)” Sommersemester 2017

Übungsblatt 4

Ausgabe:	Donnerstag, 4. Mai 2017
Abgabe der schriftlichen Lösungen:	Donnerstag, 11. Mai 2017
Besprechung:	Montag, 15. Mai 2017

Aufgabe 11: Zyklotronbewegung (Votieraufgabe)

a) Stellen Sie ausgehend von der Lorentz-Kraft $\boldsymbol{K}^N = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ die relativistische Bewegungsgleichung für die elektrische Ladung q mit Ruhemasse m_0 auf. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass in einem homogenen Magnetfeld die Projektion der Bahn in die Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{B}$ ein Kreis ist (Radius r). Beweisen Sie, dass $rB = C\beta\gamma$ gilt, und berechnen Sie die Konstante C. (3 Punkte)

c) Wovon hängen r und die Bahngeschwindigkeit ab? Berechnen Sie die Umlaufzeit. (2 Punkte)

Aufgabe 12: Aberration (schriftlich)

Betrachten Sie ein auf Sie zukommendes Lichtsignal, dessen umgekehrter Ausbreitungsvektor mit den x-Achsen des Laborsystems K und des mit v längs der x-Achse bewegten Systems K' die Winkel α bzw. α' einschließt.

Beweisen Sie die Aberrationsformel:

$$\tan\frac{\alpha'}{2} = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{1/2} \tan\frac{\alpha}{2} \,.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 13: Maxwell-Gleichungen (schriftlich)

Zu einer kovarianten Formulierung der Elektrodynamik gelangt man, wenn man den Feldstärketensor $F_{\alpha\beta}$ und den Viererstrom j^α,

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} , \qquad j^\alpha = \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} ,$$

mit den elektrischen und magnetischen Feldern $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$, der Ladungsdichte ρ und der Stromdichte $\boldsymbol{j}$ einführt. Der duale Feldstärketensor ist

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

mit dem vollständig antisymmetrischen Tensor $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$.

a) Zeigen Sie, dass sich die Gleichungen

$$\tilde{F}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \ , \qquad F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \mu_0 j^\alpha \ ,$$

wobei das Komma eine Ableitung symbolisiert ($F^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} = \partial_\gamma F^{\alpha\beta}$), in die vier Maxwell-Gleichungen der nicht-kovarianten Schreibweise umschreiben lassen. (4 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass $j^\alpha{}_{,\alpha} = 0$ gilt und dies der Ladungserhaltung entspricht. (2 Punkte)

c) Das Viererpotential $A^\alpha = (\Phi/c, A_x, A_y, A_z)^{\mathrm{T}}$ führt über $F^{\alpha\beta} = A^{\beta,\alpha} - A^{\alpha,\beta}$ auf die elektrischen und magnetischen Felder. Geben Sie an, wie sich $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ aus Φ und $\boldsymbol{A}$ ergeben. (2 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass $F^{\alpha\beta}$ unter der Transformation $A'^\alpha = A^\alpha - \partial^\alpha\Lambda(x^\beta)$ mit einer beliebigen Funktion Λ invariant ist. (1 Punkt)

Aufgabe 14: Lorentztransformation des Feldstärketensors (Votieraufgabe)

Wir betrachten wieder die Standardkonfiguration der Lorentztransformation mit einem Lorentz-Boost in x-Richtung aus Aufgabe 2.

a) Beweisen Sie, dass die Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder in K und K' wie folgt zusammenhängen:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \ , \\ E'_y &= \gamma(E_y - c\beta B_z) \ , \\ E'_z &= \gamma(E_z + c\beta B_y) \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'_x &= B_x \ , \\ B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z/c) \ , \\ B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y/c) \ . \end{aligned}$$

(4 Punkte)

b) Verifizieren Sie anhand des Ergebnisses die Lorentz-Invarianten des Feldstärketensors

$$\boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{E}'^2 - c^2\boldsymbol{B}'^2 = \boldsymbol{E}^2 - c^2\boldsymbol{B}^2 \ .$$

(4 Punkte)