Übungen zur Vorlesung „Relativitätstheorie, Astrophysik, Kosmologie (Vertiefungsmodul)"
Sommersemester 2017

Übungsblatt 5

Ausgabe:	Donnerstag, 11. Mai 2017
Abgabe der schriftlichen Lösungen:	Donnerstag, 18. Mai 2017
Besprechung:	Montag, 22. Mai 2017

Aufgabe 15: Lorentztransformationen der Felder (schriftlich)

Gehen Sie von einem elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$ und einem magnetischen Feld $\boldsymbol{B}$ aus, die $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ erfüllen.

a) Zeigen Sie, dass es eine Lorentztransformation gibt, die auf $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{0}$ führt, falls $\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2/c^2 > 0$ erfüllt ist. Zeigen Sie, dass sich im Fall $\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2/c^2 < 0$ in einem dazu bewegten Koordinatensystem $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{0}$ erzielen lässt. (5 Punkte)

b) Welche Aussagen können Sie treffen, wenn zusätzlich zu $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ noch $\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2/c^2 = 0$ gilt? (3 Punkte)

Aufgabe 16: Energie-Impulstensor der Elektrodynamik (Votieraufgabe)

In der kovarianten Formulierung der Elektrodynamik lässt sich folgender Tensor aufstellen.

$$T^{\mu\lambda} = -\frac{1}{\mu_0}\left(\eta_{\nu\kappa}F^{\mu\kappa}F^{\lambda\nu} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\lambda}F_{\nu\kappa}F^{\nu\kappa}\right)$$

Wir sind an der Zeile $\mu = 0$ interessiert.

a) Berechnen Sie T^{00} und T^{0i}, $i = 1, 2, 3$, und stellen Sie den Zusammenhang mit der elektromagnetischen Energiedichte $u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right)$ und dem Poynting-Vektor $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ her. (4 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass aus $\delta_\lambda T^{0\lambda} = 0$ eine Kontinuitätsgleichung folgt, und interpretieren Sie diese. (4 Punkte)

Aufgabe 17: Lichtablenkung und Äquivalenzprinzip (schriftlich)

Wir betrachten ein frei fallendes Labor im Schwerefeld, z. B. einen Fahrstuhl, dessen Haltekabel durchtrennt wurden. Ein Lichtstrahl werde von einer Seite des Labors in eine Richtung senkrecht zur Richtung des lokalen Schwerefelds geschickt.

a) Begründen Sie mit Hilfe des Äquivalenzprinzip, dass sich das Licht im Labor geradlinig mit Geschwindigkeit c ausbreitet. (4 Punkte)

b) Auf welcher Bahn verläuft das Licht von außen gesehen? Um welche Länge „fällt“ ein horizontal ausgeschickter Strahl bei lokal konstanter und paralleler Erdbeschleunigung g, wenn das Labor 1 km breit ist? (4 Punkte)

Aufgabe 18: Metriken (Votieraufgabe)

a) Zeigen Sie, dass die zweidimensionale Metrik, die durch

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}v^2 - v^2\mathrm{d}u^2$$

gegeben ist, tatsächlich nur eine zweidimensionale Minkowski-Metrik ist. Finden Sie dazu eine Koordinatentransformation $x(u,v)$, $t(u,v)$, so dass

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 \,.$$

(4 Punkte)

b) Die Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - \left(\frac{3}{13}\mathrm{d}x + \frac{4}{13}\mathrm{d}y + \frac{12}{13}\mathrm{d}y\right)^2$$

scheint dreidimensional zu sein. Zeigen Sie, dass sie tatsächlich einen zweidimensionalen Raum beschreibt. Finden Sie zwei neue Koordinaten ζ und η, für die das Linienelement die Form

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\zeta^2 + \mathrm{d}\eta^2$$

annimmt. (6 Punkte)