

**Übungen zur Vorlesung „Relativitätstheorie,
Astrophysik, Kosmologie (Vertiefungsmodul)“
Sommersemester 2017**

Übungsblatt 6

Ausgabe: Donnerstag, 18. Mai 2017
Abgabe der schriftlichen Lösungen: bis Mittwoch, 24. Mai 2017, beim Übungsgruppenleiter
Besprechung: Montag, 29. Mai 2017

Aufgabe 19: Inhomogene Gravitationsfelder (schriftlich)

Nach dem Äquivalenzprinzip laufen mechanische Vorgänge in einem kleinen, frei fallenden Labor ebenso ab wie in einem Newtonschen Inertialsystem. In dieser Aufgabe sollen Sie im Rahmen der Newtonschen Mechanik untersuchen, welche Auswirkungen die endliche Größe eines im inhomogenen Gravitationsfeld fallenden Labors hat.

Betrachten Sie dazu zwei Körper, die im Abstand $r_1(t)$ und $r_2(t) = r_1(t) + \xi(t)$ radial auf eine Punktmasse M zufallen. Wäre das Äquivalenzprinzip global erfüllt, so wäre $\xi(t)$ konstant.

a) Leiten Sie aus der Newtonschen Bewegungsgleichung ab, dass für kleine ξ näherungsweise gilt

$$\ddot{\xi} = c^2 \frac{r_s}{r^3} \xi .$$

(4 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass sich der Abstand ξ der beiden Körper während einer kurzen Beobachtungszeit t um

$$\Delta\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{r_s}{r} \right)^3 \left(\frac{ct}{r_s} \right)^2 \xi_0$$

verändert, wenn ξ_0 der ursprüngliche Abstand ist. Wenn $\Delta\xi$ kleiner ist als die erreichbare Messgenauigkeit, kann man das Labor als „klein“ ansehen. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie $\Delta\xi$ für eine Labor der Größe $\xi_0 = 100$ m auf der Erdoberfläche für Beobachtungszeiten t von 1 s und 60 s. (2 Punkte)

Aufgabe 20: Schwarzes Loch aus Wasser (Votieraufgabe)

Wie groß ist der Radius einer wassergefüllten Kugel zu wählen, so dass der Radius gleich ihrem Schwarzschild-Radius $R_S = 2GM/c^2$ wird? Drücken Sie das Ergebnis in Astronomischen Einheiten

aus. Wie groß wäre die Masse des Objektes (in Sonnenmassen)? (4 Punkte)

$$G = 6,6732 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}, \quad c = 2,9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$
$$1 \text{ A.E.} = 1,4960 \cdot 10^8 \text{ km}, \quad M_{\text{Sonne}} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Aufgabe 21: Relativistische Effekte des GPS (schriftlich)

In Aufgabe 5 haben wir uns bereits mit den speziellrelativistischen Effekten im GPS-System beschäftigt. Nun wollen wir den Einfluss der Erdmasse hinzunehmen.

- a) Um welches Zeitintervall geht die Uhr auf dem Satelliten nach der Allgemeinen Relativitätstheorie in der Höhe des Satelliten *schneller* als auf der Erde? (3 Punkte)
- b) Welche Missweisung in der Ortsbestimmung ergibt sich demnach bereits nach 24 Stunden wenn man speziell- und allgemeinrelativistische Effekte berücksichtigt? (3 Punkte)

Aufgabe 22: Laserstrahl in der Schwarzschildmetrik (Votieraufgabe)

Ein Raumschiff, das sich auf einer kreisförmigen Bahn mit dem Umfang $2\pi r$ um einen Stern mit der Masse M befindet, sendet einen Laserstrahl aus. Das Laserlicht hat im Bezugssystem des Raumschiffes die Frequenz ν_0 . Der Strahl wird in der Bahnebene so ausgesendet, dass er um den Winkel α gegenüber der Tangentialrichtung nach außen zeigt.

- a) Welche Frequenz des Laserlichts nimmt ein Beobachter, der während des Aussendens direkt neben dem Raumschiff ruht (also nicht mit dem Raumschiff um den Stern rotiert), wahr? (6 Punkte)
- b) Welche Frequenz nimmt ein ruhender, (unendlich) weit vom Stern entfernter Beobachter wahr? (3 Punkte)