

**Übungen zur Vorlesung „Relativitätstheorie,
Astrophysik, Kosmologie (Vertiefungsmodul)“
Sommersemester 2017**

Übungsblatt 8

Ausgabe: Donnerstag, 1. Juni 2017
 Abgabe der schriftlichen Lösungen: bis Mittwoch, 14. Juni 2017, beim Übungsgruppenleiter
 Besprechung: Montag, 19. Juni 2017

Aufgabe 28: Gravitationsenergie (Votieraufgabe)

Zeigen Sie, dass die Gravitationsenergie einer kugelsymmetrischen Massenverteilung M mit konstanter Massendichte

$$E_{\text{grav}} = \frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}$$

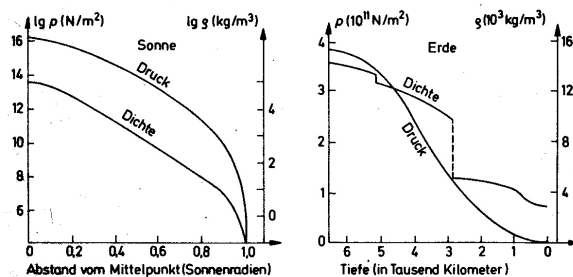
lautet, wobei R der Kugelradius ist. Das ist die Energie, die notwendig ist, um alle Anteile der Masse gegen die Gravitationskraft von allen anderen zu trennen. (6 Punkte)

Aufgabe 29: Dichte und Druck im Inneren von Erde und Sonne (Votieraufgabe)

In der Vorlesung wird hergeleitet, dass zwischen dem mittleren Druck p und der mittleren Massendichte ρ eines Sterns mit Radius R die Beziehung

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{R_S}{R}$$

besteht. Berechnen Sie damit den mittleren Druck im Erd- und Sonneninneren und vergleichen Sie die Resultate mit Standardmodellen in der folgenden Abbildung. (6 Punkte)



Quelle: Sexl: Weiße Zwerge, schwarze Löcher, Rowohlt 1975

Daten:

$$M_{\text{Sonne}} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \quad R_{\text{Sonne}} = 6,9598 \cdot 10^8 \text{ m}, \quad M_{\text{Erde}} = 5,977 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \\ R_{\text{Erde}} = 6375 \text{ km}, \quad G = 6,6732 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}, \quad c = 2,9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aufgabe 30: Maximale Bergeshöhen (schriftlich)

Während der Asteroid Lutetia (Abbildung unten) deutlich von der Kugelgestalt abweicht, sind Planeten oder auch der Erdmond fast rund. Der Grund dafür ist in der höheren Masse dieser Himmelskörper zu suchen: Ab einer gewissen Grenzmasse sind geometrische Formen, die von der Kugelgestalt abweichen, wegen der dann dominierenden Schwerkraft nicht mehr möglich. Diesen Effekt schätzen wir ab.

Auf einem Himmelskörper mit Radius R und Masse M denken wir uns einen Berg der Höhe H . Die chemische Bindung liefert eine Bindungsenergie von $\varepsilon \approx 1\text{ eV}$ pro Atom, die das Material stabilisiert. Ein Berg ist instabil, wenn seine gesamte chemische Bindungsenergie geringer ist als die potentielle Energie, die nötig ist, um den Berg aufzuschichten.

Approximieren Sie die Dichte des Gesteins mit Hilfe der Protonenmasse und des Bohrschen Radius $r_B = \frac{\hbar}{m_e c \alpha}$ (m_e : Elektronenmasse, $\alpha \approx 1/137$: Feinstrukturkonstante) durch

$$\frac{M}{R^3} \approx \frac{m_p}{r_B^3}$$

und zeigen Sie, dass der Berg stabil ist, falls

$$\frac{H}{R} < \left(\frac{M_c}{M}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{R_c}{R}\right)^2.$$

Dabei ist

$$M_c = \left(\frac{\varepsilon \hbar}{m_p^2 A G \alpha m_e c}\right)^{\frac{3}{2}} m_p, \quad R_c = \left(\frac{\varepsilon \hbar}{m_p^2 A G \alpha m_e c}\right)^{\frac{1}{2}} r_B,$$

und A die Massenzahl der beteiligten Atome. Welchen Wert haben M_c und R_c für Massenzahlen $A \approx 50$? (9 Punkte)



Asteroid Lutetia, aufgenommen von der ESA-Raumsonde Rosetta am 10.7.2010 aus einer Entfernung von 3162 km. Größe: 121 km x 101 km x 75 km. Quelle: ESA

Aufgabe 31: Planeten und Monde (schriftlich)

Planeten und Monde unterscheiden sich von kleineren Körpern dadurch, dass ihre Bindungsenergie durch die Gravitation bestimmt wird und nicht durch die chemische Bindung. Zeigen Sie, dass dies mit den Bezeichnungen der Aufgabe 30 für $M > M_c$ der Fall ist. (5 Punkte)