

**Übungen zur Vorlesung „Relativitätstheorie,  
Astrophysik, Kosmologie (Vertiefungsmodul)“  
Sommersemester 2017**

**Übungsblatt 9**

Ausgabe: Montag, 12. Juni 2017  
Abgabe der schriftlichen Lösungen: Donnerstag, 22. Juni 2017  
Besprechung: Montag, 26. Juni 2017

**Aufgabe 32: Zustandsdichte in zwei Dimensionen (Votieraufgabe)**

In der Vorlesung wurde hergeleitet, dass die Zustandsdichte eines nicht-relativistischen Fermi-Gases in drei Dimensionen die Abhängigkeit von der Energie

$$\frac{dN}{dE} \sim \sqrt{E}$$

zeigt. Leiten Sie analog her, dass die Zustandsdichte in zwei Dimensionen nicht von der Energie abhängt. Wie lauten der Fermi-Impuls und die Fermi-Energie bei gegebener Teilchenzahl  $N$ ?

(10 Punkte)

**Aufgabe 33: Fermienergie in weißen Zwergen (Votieraufgabe)**

Schätzen Sie ab, wie hoch die Fermienergie  $E_F$  (in eV) des Elektronengases in einem weißen Zwergstern der kritischen Dichte  $\rho_c = m_p/\lambda_{Ce}^3$  ist ( $m_p$  = Protonenmasse,  $\lambda_{Ce} = \hbar/m_e c$  = Compton-Wellenlänge des Elektrons).

Welcher Temperatur  $E_F/k_B$  ( $k_B = 8,61733 \cdot 10^{-5}$  eV/K: Boltzmann-Konstante) entspricht dies? Vergleichen Sie mit typischen Werten der Fermienergie des Elektronengases in Festkörpern.

(6 Punkte)

**Aufgabe 34: Massen der Hauptreihensterne (schriftlich)**

Wir lernen in der Vorlesung, dass die Masse eines *entarteten Sternes* nicht größer sein kann als die Chandrasekhar-Grenzmasse

$$M_C = m_p \cdot \left( \frac{\hbar c}{G m_p^2} \right)^{3/2} = 2 \cdot 10^{57} m_p \approx 3 \cdot 10^{30} \text{ kg} \approx 1,5 M_\odot ,$$

wobei  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg die Masse eines Protons ist.

Auch für *nichtentartete Hauptreihensterne* existiert eine obere Grenzmasse. Physikalisch wird sie dadurch bedingt, dass der Strahlungsdruck

$$p_{\text{R}} \approx \frac{(k_{\text{B}}T)^4}{(\hbar c)^3} .$$

den Gasdruck  $p$  nicht übersteigen darf.

Nehmen Sie an, dass die Sternmaterie sich wie ein ideales Gas verhält, und zeigen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung hergeleiteten Beziehung

$$\frac{p}{\rho c^2} \approx \frac{R_{\text{S}}}{R} ,$$

dass die Bedingung  $p_{\text{R}} < p$  bei Weglassen aller Zahlenfaktoren ebenfalls auf die Chandrasekhar-Grenzmasse  $M_{\text{C}}$  führt. (Tatsächlich liegt der Wert bei etwa 60 Sonnenmassen.) (10 Punkte)