Übungen zur Vorlesung „Relativitätstheorie, Astrophysik, Kosmologie (Vertiefungsmodul)"
Sommersemester 2017

Übungsblatt 10

Ausgabe:	Donnerstag, 22. Juni 2017
Abgabe der schriftlichen Lösungen:	Donnerstag, 29. Juni 2017
Besprechung:	Montag, 3. Juli 2017

Aufgabe 35: Zusammensetzung von Neutronensternen (schriftlich)

Wieviel Prozent eines ungeladenen Neutronensterns mit dem Radius $R = 10^4\,\mathrm{m}$ und der Masse $M = 1,4\,M_\odot = 2{,}8 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ müssen aus Elektronen und Protonen bestehen, damit der Stern gegen Neutronenzerfall $\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_e$ stabil ist?

a) Neutronen sind dann stabil gegen einen Neutronenzerfall (β-Zerfall), wenn die Existenz eines Neutrons energetisch günstiger ist als die eines Elektrons und eines Protons. Berücksichtigt werden müssen dabei die frei werdende Energie aus dem Zerfall sowie die Fermienergien des Neutrons, des Protons und des Elektrons. Stellen Sie eine passende Ungleichung auf. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Fermienergie der Neutronen unter der Annahme, dass der gesamte Neutronenstern aus Neutronen besteht. Zeigen Sie, dass damit die Zerfallsenergie irrelevant ist und nicht berücksichtigt werden muss. Neutronen können klassisch behandelt werden. (3 Punkte)

c) Die Fermienergien der Protonen kann wie die der Neutronen klassisch behandelt werden, die der Elektronen allerdings relativistisch. Berechnen sie damit, bei welcher Anzahldichte die Fermienergie der Elektronen mit der der Protonen identisch wäre. Vergleichen Sie das mit einem typischen Wert der Anzahldichte aus dem vorherigen Aufgabenteil und begründen Sie damit, dass die Fermienergie der Protonen nicht relevant ist und ebenfalls vernachlässigt werden kann. (3 Punkte)

d) Berechnen Sie nun die Anzahldichte der Elektronen im Gleichgewicht und geben Sie den Anteil der Elektronen an. (2 Punkte)

$m_\mathrm{p} = 1{,}672649 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 938{,}278\,\mathrm{MeV}/c^2,$
$m_\mathrm{n} = 1{,}674955 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 939{,}573\,\mathrm{MeV}/c^2,$
$m_\mathrm{e} = 9{,}10954 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 511{,}003\,\mathrm{keV}/c^2\,.$

Aufgabe 36: Magnetische Dipolstrahlung von Pulsaren (schriftlich)

Der Poynting-Vektor des von einem zeitlich veränderlichen magnetischen Dipol erzeugten Strahlungsfeldes ist in der Fernzone gegeben durch

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\varepsilon_0}{16\pi^2 c}\,|\ddot{\boldsymbol{m}}|^2\,\frac{\sin^2\vartheta}{r^2}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}\,.$$

Dabei ist $\boldsymbol{r}$ der Vektor vom Dipol zum Beobachtungspunkt, $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ das retardierte magnetische Dipolmoment und ϑ der Winkel zwischen $\boldsymbol{m}$ und der Beobachtungsrichtung. Berechnen Sie die von einem mit der Frequenz ω rotierenden magnetischen Dipol (Pulsar) der Stärke m_0 abgestrahlte Leistung $\bar{S}$ für den Fall, dass das Dipolmoment auf der Rotationsachse senkrecht steht (senkrechter Rotator). (6 Punkte)

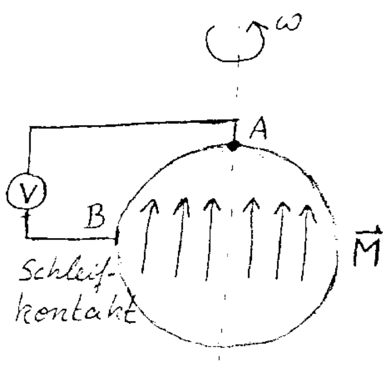
Ergebnis: $\bar{S} = \dfrac{\varepsilon_0}{6\pi c}\,\omega^4\,m_0^2$

Aufgabe 37: Abbremsung eines Neutronensterns (Votieraufgabe)

Ein homogen magnetisierter rotierender Neutronenstern (senkrechter Rotator) emittiert magnetische Dipolstrahlung und wird dadurch allmählich abgebremst. Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen der Polfeldstärke B_0, wobei $B_0 = 2m_0/R^3$ mit dem magnetischen Moment m_0, der Rotationsperiode P und ihrer Ableitung $\dot{P}$, indem Sie die zeitliche Änderung der Rotationsenergie $E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$ mit der Abstrahlung $\bar{S}$ gleichsetzen.

Welches Polmagnetfeld ergibt sich für den Crab-Pulsar, wenn Sie für I das Trägheitsmoment einer homogenen Vollkugel mit 1,5 Sonnenmassen und einem Radius von 10 km verwenden? ($P = 0,03309756505419\,\mathrm{s}$, $\dot{P} = 4,226889764 \times 10^{-13}\,\mathrm{s/s}$). (6 Punkte)

Aufgabe 38: Der Pulsar als Unipolarmaschine (Votieraufgabe)



Eine homogen magnetisierte Kugel ($\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}$) mit Radius R rotiere mit Periode P um die Symmetrieachse der Magnetisierung (paralleler Rotator).

a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ im Inneren der Kugel, so dass es die Lorentzkraft gerade aufhebt. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie die elektrische Spannung V zwischen dem Pol A und einem Schleifkontakt B am Äquator. (5 Punkte)

   Ergebnis: $V = \frac{\omega}{2} R^2 B$

c) Welche Spannung ergibt sich für $P = 0{,}5\,\mathrm{s}$, $R = 10\,\mathrm{cm}$, $B = 0{,}1\,\mathrm{T}$? Was erhält man für $P = 0{,}5\,\mathrm{s}$, $R = 10\,\mathrm{km}$, $B = 5 \cdot 10^8\,\mathrm{T}$? (2 Punkte)