

**Übungen zur Vorlesung „Relativitätstheorie,  
Astrophysik, Kosmologie (Vertiefungsmodul)“  
Sommersemester 2017**

**Übungsblatt 11**

Ausgabe: Donnerstag, 29. Juni 2017  
 Abgabe der schriftlichen Lösungen: Donnerstag, 6. Juli 2017  
 Besprechung: Montag, 10. Juli 2017

**Aufgabe 39: Materiedominiertes Universum (schriftlich)**

Das materiedominierte Universum wird nach der Vorlesung beschrieben durch

$$\dot{a}(t)^2 - \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0 a_0^3}{a(t)} = -qc^2 .$$

a) Zeigen Sie, dass die Lösung in einem flachen Universum, d.h. für  $q = 0$ , durch

$$a(t) = \left(\frac{9}{2}\tilde{a}\right)^{1/3} (ct)^{2/3}$$

gegeben ist, wenn man einen Urknall zum Zeitpunkt  $t = 0$  annimmt. Wie lautet  $\tilde{a}$ ? (5 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Lösung in einem negativ gekrümmten Universum, also mit  $q = -1$ , für  $a(t = 0) = 0$

$$\begin{aligned} a(\eta) &= \tilde{a} (\cosh(\eta) - 1) \\ ct(\eta) &= \tilde{a} (\sinh(\eta) - \eta) \end{aligned}$$

lautet.

(7 Punkte)

**Aufgabe 40: Weltmodelle mit kosmologischer Konstante (Votieraufgabe)**

Für ein Universum mit kosmologischer Konstanten und Materie erhält man nach der Vorlesung

$$\dot{a}(t)^2 - \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0 a_0^3}{a(t)} - \frac{\Lambda c^2}{3} a(t)^2 = -qc^2 .$$

a) Für eine positive Krümmung  $q = 1$  findet man darin die Lösung eines statischen Universums. Geben Sie das  $\Lambda_c$  an, für das diese Lösung existiert. Wie groß ist das zugehörige  $a_c$ ? (4 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass es für positive Krümmung und  $0 < \Lambda < \Lambda_c$  Lösungen gibt, die keinen Urknall enthalten. Skizzieren Sie für diesen Fall ein Potentialbild analog zu dem aus der Vorlesung. Markieren Sie darin den minimalen Radius  $a_{\min}$ , den das Universum annehmen kann. (4 Punkte)

### Aufgabe 41: De Sitter-Metrik (Votieraufgabe)

Die de Sitter-Metrik wird beschrieben durch das Längenelement

$$ds^2 = c^2 dt^2 - e^{2ct/l} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

mit einer Konstanten  $l$ .

- a) Zeigen Sie, dass die de Sitter-Metrik ein Spezialfall der Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik ist. Wie lauten die Parameter  $q$  und  $a(t)$ ? (3 Punkte)
- b) Bestimmen Sie aus der Einstein-Gleichung und dem Energiesatz die Dichte  $\rho$  und den Druck  $p$  in einem de Sitter-Universum. Gehen Sie von einer Einstein-Gleichung mit einer allgemeinen Energiedichte  $\rho(a)$  aus, die alle möglichen Energieformen enthält. Verzichten Sie also auf einen expliziten Term mit der kosmologischen Konstanten. (3 Punkte)