

Übungen zur Vorlesung „Astronomie und Astrophysik 1“, WS 2016/17

7. Übungsblatt vom 24.01.2017

Abgabe der schriftlichen Übung: Dienstag, 31.01.2017, 15:30 Uhr, nach der Vorlesung.

Aufgabe 19: Effektiver Brechungsindex im Gravitationsfeld (schriftlich) 10 P.

a) Führen Sie im Schwarzschild-Linienelement

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

eine Transformation auf isotrope Koordinaten durch, indem Sie eine Radialkoordinate \bar{r} definieren durch

$$r = \left(1 + \frac{r_s}{4\bar{r}}\right)^2 \bar{r}.$$

Zeigen Sie, dass das Linienelement die Gestalt

$$ds^2 = \left(\frac{1 - r_s/4\bar{r}}{1 + r_s/4\bar{r}}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_s}{4\bar{r}}\right)^4 d\vec{x}^2$$

mit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \bar{r} \sin \theta \cos \varphi \\ \bar{r} \sin \theta \sin \varphi \\ \bar{r} \cos \theta \end{pmatrix}$$

annimmt.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Metrik die lokale Lichtgeschwindigkeit v_{Licht} und zeigen Sie, dass für den Brechungsindex n in erster Ordnung in r_s/r gilt

$$n = \frac{c}{v_{\text{Licht}}} = 1 + \frac{r_s}{r}.$$

Aufgabe 20: Dopplerverschiebung von Spektrallinien (10 Punkte)

Eine Galaxie entferne sich von uns mit der Geschwindigkeit v_r . In ihrem System werde eine Spektrallinie der Wellenlänge λ_0 ausgesandt. Wir messen die Doppler-verschobene Wellenlänge λ . Die relative Wellenlängenverschiebung wird mit z bezeichnet („Rotverschiebung“), $z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$.

a) Berechnen Sie, welcher Zusammenhang nach der Speziellen Relativitätstheorie zwischen λ_0 , λ und v_r besteht (longitudinaler Doppler-Effekt).

b) Geben Sie die Rotverschiebung z als Funktion von $\beta_r = v_r/c$ an. Drücken Sie auch v_r/c durch z aus.

d) Was ergibt sich für z im nichtrelativistischen Grenzfall $v_r/c \ll 1$ (linearer Dopplereffekt)?

c) Für welchen Wert von β_r wird die Lyman- α -Linie des H-Atoms auf die Wellenlänge der Balmer- α -Linie verschoben?

($\lambda_{\text{Lyman-}\alpha} = 121,6 \text{ nm}$, $\lambda_{\text{Balmer-}\alpha} = 656,5 \text{ nm}$).