Übungen zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik”
Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 2

Ausgabe:	Donnerstag, 20. Oktober 2016
Abgabe der schriftlichen Lösungen:	Donnerstag, 27. Oktober 2016
Besprechung:	2./3./4. November 2016

Aufgabe 5: Elementare Integrale (schriftlich)

a) Berechnen Sie folgende elementare Integrale mit Hilfe der Integrationsregeln aus der Vorlesung:

$$\int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\ , \quad \int x\sin(x)\,\mathrm{d}x\ , \quad \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x\ , \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

(8 Punkte)

b) Benutzen Sie die Relation

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\ ,$$

um das Integral

$$\int \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

zu berechnen. (3 Punkte)

Aufgabe 6: Gamma-Funktion (schriftlich)

a) Die Gamma-Funktion $\Gamma(\nu)$ ist für $\nu > 0$ durch das Integral

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty x^{\nu-1}\exp(-x)\,\mathrm{d}x$$

definiert. Zeigen Sie mittels partieller Integration, dass die Gamma-Funktion die Beziehung

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$$

erfüllt. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie den Wert $\Gamma(1)$ und zeigen Sie, dass für natürliche Zahlen

$$\Gamma(n+1) = n!$$

gilt, d.h. die Gamma-Funktion ist eine differenzierbare Erweiterung der Fakultät. (5 Punkte)

c) Zeigen Sie durch Substitution, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \Gamma(1/2)\ .$$

(2 Punkte)

Aufgabe 7: Konvergenz von Integralen (Votieraufgabe)

a) Berechnen Sie die Stammfunktion

$$\int \frac{1}{x^\nu}\,\mathrm{d}x\ , \quad \text{mit} \quad \nu \in \mathbb{R}\ .$$

(2 Punkte)

b) Untersuchen Sie, für welche Werte von ν folgende Integrale konvergieren:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\nu}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^\nu}\,\mathrm{d}x\ , \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^\nu}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^\nu}\,\mathrm{d}x$$

(2 Punkte)

c) Untersuchen Sie nun die Konvergenz der folgenden Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x\ , \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\ , \quad \int_0^\infty \frac{\sin(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Tipp: Untersuchen Sie das Verhalten der Integranden für $x \to 0$ und für $x \to \infty$ und benutzen Sie Ihre Erkenntnisse aus Teil b). (6 Punkte)

d) Freiwillig: Berechnen Sie für alle Integrale aus Teil c), die konvergieren, ihre Werte unter Ausnutzung aller Ihnen zur Verfügung stehenden Hilfsmittel wie z.B. eines CAS (Mathematica, Maple, ...) oder Integraltabellen wie z.B. „Table of Integrals, Series, and Products“ von Gradshteyn und Ryzhik. (2 Bonuspunkte)

Aufgabe 8: Taylorreihen (Votieraufgabe)

a) Berechnen Sie explizit die folgenden in der Vorlesung angegebenen Taylorreihen um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ , \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\ .$$

(4 Punkte)

b) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{\exp(-ax)}{b+x}$$

im Punkt $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe 2. Ordnung. Leiten Sie das Resultat her, indem Sie zuerst die Taylorreihenentwicklungen der Funktionen $\exp(-ax)$ und $1/(b+x)$ berechnen. Welche Terme können vernachlässigt werden? (6 Punkte)