Übungen zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik”
Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 3

Ausgabe:	Donnerstag, 27. Oktober 2016
Abgabe der schriftlichen Lösungen:	Donnerstag, 3. November 2016
Besprechung:	9./10./11. November 2016

Aufgabe 9: Innere Substitution und partielle Integration (schriftlich)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-2}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-2x-x^2}} \; .$$

Verwenden Sie zuerst eine quadratische Ergänzung der Form $u = x + a$, um den Ausdruck unter der Wurzel zu vereinfachen, d.h. bestimmen Sie a so, dass ein möglichst einfaches Polynom in u entsteht. Suchen Sie dann ein geeignetes b, um das Integral mit Hilfe der Substitution $u = b\cos(v)$ berechnen zu können. (7 Punkte)

b) Berechnen Sie durch partielle Integration und Anwendung von $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ das bestimmte Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x \; .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 10: Zurück zur Gamma-Funktion (schriftlich)

Wir setzen in dieser Aufgabe die Betrachtung der Gamma-Funktion aus Aufgabe 6 fort.

a) Verwenden Sie den Wert $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ und eine geeignete Substitution, um die Gleichung

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \exp\left(-\lambda x^2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

zu verifizieren. Berechnen Sie nun die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^2 \exp\left(-x^2\right) \; , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^4 \exp\left(-x^2\right) \; . \tag{1}$$

Verwenden Sie dafür geschickte Ableitungen von $F(\lambda)$ nach λ und lösen Sie diese Integrale nicht explizit. (6 Punkte)

b) Schreiben Sie die Integrale aus Gleichung (1) nun direkt auf die Gamma-Funktion um. Nutzen Sie Ihr Wissen über die Gamma-Funktion aus, um die Werte der Integrale auf diesem Weg anzugeben. Zeigen Sie, dass Sie die gleichen Ergebnisse wie in Teil a) erhalten. (4 Punkte)

Aufgabe 11: δ-Funktion (Votieraufgabe)

a) Betrachten Sie die Funktionen

$$f_1(x) = \frac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2}\ , \quad f_2(x) = \frac{1}{\pi x}\sin(x/\epsilon)\ , \quad f_3(x) = \frac{\Theta(x+\epsilon)-\Theta(x)}{\epsilon}$$

und *begründen* Sie, warum es *plausibel erscheint*, dass sie für $\epsilon \to 0$ (wobei $\epsilon > 0$) gegen die δ-Funktion konvergieren. Dabei ist $\Theta(x)$ die Stufenfunktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \geq 0\ , \\ 0 & \text{für} \quad x < 0\ . \end{cases}$$

(4 Punkte)

b) Berechnen Sie explizit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(x)\,\mathrm{d}x\ , \qquad i \in \{1,2,3\}\ .$$

(Hinweis: $\int_0^\infty \sin(x)/x\,\mathrm{d}x = \pi/2$) (6 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ gilt. Dafür reicht es aus, zu zeigen, dass man mit Hilfe einer geeigneten Substitution für eine beliebige Funktion $g(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\delta(ax)g(x) = \frac{1}{|a|}g(0) = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\delta(x)g(x)$$

erhält. (5 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\delta(h(x)) = \sum_i \frac{1}{|h'(x_i)|}\delta(x-x_i)\ ,$$

wobei die Summe über alle einfachen Nullstellen x_i von h läuft, d.h. $h(x_i) = 0$. Gehen Sie dazu wie in Teil c) vor. Teilen Sie das Integral in sinnvolle Abschnitte um die Nullstellen von $h(x)$ (Z.B. $\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{x_1-a}^{x_1+a} + \int_{x_2-a}^{x_2+a} + \ldots$. Warum ist das möglich?) und transformieren Sie auf die Integrationsvariable $y = h(x)$. (5 Punkte)