Übungen zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik”
Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 4

Ausgabe:	Donnerstag, 3. November 2016
Abgabe der schriftlichen Lösungen:	Donnerstag, 10. November 2016
Besprechung:	16./17./18. November 2016

Aufgabe 12: Ableitungen der δ-Funktion (schriftlich)

a) Zeigen Sie mittels partieller Integration, dass man die Distribution $\delta'(x)$ mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-x_0)\,\mathrm{d}x = -f'(x_0)$$

als Ableitung der δ-Funktion verstehen kann. (2 Punkte)

b) Welches Ergebnis erhalten Sie für die zweite Ableitung der δ-Funktion,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta''(x-x_0)\,\mathrm{d}x = \dots\,?$$

(3 Punkte)

c) Schließen Sie daraus auf ein Ergebnis für die n-te Ableitung,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)\,\mathrm{d}x = \dots$$

Ein Beweis ist ausdrücklich nicht verlangt, begründen Sie aber Ihre Aussage. (3 Punkte)

Aufgabe 13: Wir gewöhnen uns an komplexe Zahlen (schriftlich)

a) Vereinfachen Sie die folgenden komplexen Zahlen und schreiben Sie sie in die Darstellungen $x+\mathrm{i}y$ sowie $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ um:

$$z_1 = \mathrm{i}^4, \quad z_2 = \mathrm{i}^2 + 2\mathrm{i} + 1, \quad z_3 = \frac{1}{1+\mathrm{i}},$$
$$z_4 = \frac{3+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}, \quad z_5 = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Tragen Sie die Zahlen zusätzlich als Punkte in einem gemeinsamen Diagramm in die komplexe Ebene ein. (7 Punkte)

b) Beschreiben Sie mit je einer eigenen Skizze die Menge der Punkte in der komplexen Ebene, die folgende Gleichungen oder Ungleichungen mit der komplexen Zahl z erfüllen:

$$\mathrm{Re}(z) \geq 2\ , \quad \mathrm{Re}(z^2) = 4\ , \quad |z| = 2\ , \quad |z-1| < 1\ , \quad z^2 = -\bar{z}^2$$

(5 Punkte)

Aufgabe 14: Umformungen und Funktionen mit komplexen Zahlen (Votieraufgabe)

a) Bringen Sie folgende komplexe Zahlen auf eine möglichst einfache Form:

$$z_1 = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^4, \quad z_2 = (1-\mathrm{i})^8, \quad z_3 = \left(\frac{7+3\mathrm{i}}{\sqrt{50}\mathrm{i}+\sqrt{8}}\right)^{56}$$

(3 Punkte)

b) Bringen Sie die folgenden Ausdrücke mit der komplexen Zahl $z = a + ib$ auf die Form $x + \mathrm{i}y$, d.h. bestimmen Sie $x = x(a,b)$ und $y = y(a,b)$:

$$\frac{1}{z^2}, \quad \frac{z}{\bar{z}}, \quad \frac{1+z}{1-z}, \quad \frac{1}{z-\mathrm{i}}$$

(4 Punkte)

c) Gegeben sei die komplexe Zahl

$$z = \frac{(-2+2\mathrm{i})^7}{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})^5}\ .$$

Bringen Sie z auf die Form $z = r\,(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$. (2 Punkte)

d) Berechnen Sie jeweils für die komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ explizit die Werte von

$$\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z})\ , \quad |\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}|\ , \quad \mathrm{Im}(\cosh^2(z))\ .$$

Verwenden Sie für Ihr Ergebnis trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen, wo immer es möglich ist. (6 Punkte)

e) Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

$$\exp(\mathrm{i}^3)\ , \quad 2^{\mathrm{i}+3}\ , \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2\mathrm{i}}$$

(5 Punkte)