Übungen zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik"
Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 8

Ausgabe:	Donnerstag, 1. Dezember 2016
Abgabe der schriftlichen Lösungen:	Donnerstag, 8. Dezember 2016
Besprechung:	14./15./16. Dezember 2016

Aufgabe 25: Beziehungen mit Skalar- und Vektorprodukten (schriftlich)

Führen Sie die folgenden Beweise, *ohne* die Komponentenschreibweise zu verwenden.

a) Beweisen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$. (2 Punkte)

b) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 \leq (|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|)^2$. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass der Vektor $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - |\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}$ senkrecht auf $\boldsymbol{a}$ steht. (2 Punkte)

d) Beweisen Sie die Relation $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2$. (2 Punkte)

Aufgabe 26: Basiswechsel (schriftlich)

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, d.h. das lineare Gleichungssystem

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}$$

lässt sich nur mit $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ erfüllen. Die Vektoren $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ und $\boldsymbol{b}_3$ bilden also eine (nicht orthonormale) Basis. (4 Punkte)

b) Drücken Sie die Vektoren $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ und $\boldsymbol{e}_z$ der natürlichen Basis aus der Vorlesung durch die neue Basis aus, d.h. finden Sie für jeden der drei Vektoren $\boldsymbol{e}_i$ eine Darstellung $\boldsymbol{e}_i = \sum_j c_{i,j}\boldsymbol{b}_j$. (5 Punkte)

c) Es sei der Vektor

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

in der natürlichen Basis gegeben. Finden Sie seine Komponenten in der neuen Basis $\boldsymbol{b}_i$. (3 Punkte)

Aufgabe 27: Matrizen (Votieraufgabe)

a) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden drei Matrizen:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(4 Punkte)

b) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie alle reellen Lösungen. (4 Punkte)

c) Die Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ zur Matrix $\boldsymbol{A}$ ist die Matrix, die

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \tag{1}$$

mit der Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$ erfüllt. Bestimmen Sie die Inverse der 2×2-Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Setzen Sie dazu

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

an und lösen Sie das lineare Gleichungssystem (1). (4 Punkte)

d) Man kann eine Funktion $f(\boldsymbol{A})$ einer Matrix $\boldsymbol{A}$ über die Potenzreihe der Funktion $f(x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ definieren:

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \boldsymbol{A}^n$$

Berechnen Sie nach dieser Definition

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

(4 Punkte)

e) Berechnen Sie

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{B}\varphi/2} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} .$$

(4 Punkte)