Übungen zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik"
Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 9

Ausgabe:	Donnerstag, 8. Dezember 2016
Abgabe der schriftlichen Lösungen:	Donnerstag, 15. Dezember 2016
Besprechung:	21./22.12.2016 und Ausweichtermin für Freitag 23.12.

Aufgabe 28: Hauptträgheitsachsen (schriftlich)

Aus einem homogenen Würfel, dessen Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt, werden die Bereiche $(x > 0, y > 0)$ und $(x < 0, y < 0)$ entfernt. Der verbleibende Körper hat (in einheitenloser Form) den Trägheitstensor

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} .$$

Die Hauptträgheitsachsen, um die der Körper kräftefrei rotieren kann, sind die Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_i$ der Matrix $\boldsymbol{\Theta}$. Die zugehörigen Eigenwerte I_i entsprechen den Trägheitsmomenten für die Rotation um diese Achsen.

a) Einen Eigenvektor und den zugehörigen Eigenwert können Sie ohne Rechnung sofort ablesen. Geben Sie beides an. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie alle drei Eigenwerte aus dem charakteristischen Polynom zur Matrix $\boldsymbol{\Theta}$. Vergewissern Sie sich, dass der Eigenwert aus a) dabei ist. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die beiden noch unbekannten Eigenvektoren. Normieren Sie sie auf die Länge 1. (3 Punkte)

d) Fertigen Sie in der x-y-Ebene eine Skizze mit dem Querschnitt des Körpers an und zeichnen Sie die beiden gefundenen Hauptträgheitsachsen ein. (2 Punkte)

Aufgabe 29: Partielle Ableitungen (schriftlich)

a) Berechnen Sie für die Funktion

$$f(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$$

die partiellen Ableitungen

$$\partial_x f \ , \quad \partial_y f \ , \quad \partial_y \partial_x f \ , \quad \partial_x \partial_y f \ , \quad \partial_x^2 f \ , \quad \partial_y^2 f \ , \quad \partial_x^2 \partial_y f \quad \text{und} \quad \partial_x \partial_y \partial_x f \ .$$

Führen Sie alle Ableitungen explizit in der angegebenen Reihenfolge aus. Verifizieren Sie anschließend am gegebenen Beispiel durch den Vergleich von $\partial_y \partial_x f$ und $\partial_x \partial_y f$ sowie von $\partial_x^2 \partial_y f$ und $\partial_x \partial_y \partial_x f$, dass die Reihenfolge nicht relevant ist. (8 Punkte)

b) Berechnen Sie für die Funktion

$$g(x, y, z) = -\frac{1}{r} \qquad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

die partiellen Ableitungen

$$\partial_x g \ , \quad \partial_y g \ , \quad \partial_z g$$

und bestimmen Sie

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) g \ .$$

(4 Punkte)

Aufgabe 30: Kettenregel angewandt auf ein Integral (Votieraufgabe)

In dieser Aufgabe wollen wir die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} I(x)$ der Funktion

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sin(xt)}{t} \, \mathrm{d}t$$

bestimmen.

a) Führen Sie die Funktion

$$F(v, w, x) = \int_w^v \frac{\sin(xt)}{t} \, \mathrm{d}t$$

ein und berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_v F(v, w, x)$, $\partial_w F(v, w, x)$ und $\partial_x F(v, w, x)$. (3 Punkte)

b) Setzen Sie jetzt $v(x) = x^2$ und $w(x) = x$, so dass wir $F(v(x), w(x), x) = I(x)$ erhalten. Berechnen Sie mit der Kettenregel aus der Vorlesung die totale Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} I(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(v(x), w(x), x) \ .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 31: Vollständiges Differential (Votieraufgabe)

a) Zeigen Sie, dass das Differential $\mathrm{d}f = -(y^2 + xy)\mathrm{d}x + x^2 \mathrm{d}y$ nicht vollständig ist. (3 Punkte)

b) Bilden Sie nun das Differential

$$\mathrm{d}g = (1/xy^2)\mathrm{d}f = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \mathrm{d}x + \frac{x}{y^2} \mathrm{d}y$$

und zeigen Sie, dass es vollständig ist. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie die Funktion $g(x, y)$. Integrieren Sie dazu den Term $-(1/x+1/y)$, der gerade $\partial_x g$ entsprechen muss. Erfüllt die so gefundene Funktion $g(x, y)$ auch $\partial_y g = x/y^2$? (4 Punkte)

d) Berechnen Sie nun die Funktion $g(x, y)$, indem Sie die Beziehung $\partial_y g = x/y^2$ integrieren. Bedenken Sie, dass Sie eine Integrationskonstante erhalten, die nur in y konstant sein muss, aber von x abhängen darf. Welche Forderung an die Integrationskonstante ergibt sich aus dem vollständigen Differential? Wie muss die Konstante gewählt werden? Erhält man die gleiche Lösung wie in Teil c)? (4 Punkte)

e) Setzen Sie $g(x, y) = c$ mit einer beliebigen Konstanten c und lösen Sie die Beziehung so auf, dass Sie eine Funktion $y(x)$ erhalten. Zeigen Sie, dass diese Funktion eine Lösung der Differentialgleichungen

$$-\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{x}{y^2} y'(x) = 0 \ , \qquad x^2 y'(x) - (y^2 + xy) = 0$$

ist. Diskutieren Sie den Zusammenhang mit den Differentialen $\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}g$. (4 Bonuspunkte)