Übungen zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik"
Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 11

Ausgabe:	Donnerstag, 22. Dezember 2016
Abgabe der schriftlichen Lösungen:	Donnerstag, 12. Januar 2017
Besprechung:	18./19./20. Januar 2017

Geben Sie zu den schriftlichen Lösungen *dieses Aufgabenblatts* bitte nur das beiliegende Antwortblatt und *nicht* Ihre Rechnungen ab.

Aufgabe 36: Integration in Zylinderkoordinaten (schriftlich)

Betrachten Sie einen Zylinder der homogenen Massendichte ρ_{M}, dessen Volumen V_{Z} durch die Punktmenge $x^2 + y^2 \leq R^2$ und $|z| \leq L$ gegeben ist.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Jacobi-Determinante, wie das Volumenelement in den Zylinderkoordinaten ϱ, φ und z aus der Vorlesung lautet. (2 Punkte)

b) Geben Sie die Integrationsgrenzen für die Integration über das Volumen V_{Z} in Zylinderkoordinaten an. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie die Gesamtmasse

$$M = \int_{V_{\mathrm{Z}}} \rho_{\mathrm{M}} \, \mathrm{d}V.$$

des Zylinders. (2 Punkte)

d) Berechnen Sie das Trägheitsmoment

$$I = \int_{V_{\mathrm{Z}}} (y^2 + z^2) \, \rho_{\mathrm{M}} \, \mathrm{d}V.$$

für eine Rotation des Zylinders um die x-Achse. (3 Punkte)

Aufgabe 37: Volumen unter einer Funktion (schriftlich)

Berechnen Sie das Volumen, das von der Funktion

$$z = f(x, y) = 4 - 2x^2 + 2xy - 3y^2$$

und der Ebene $z = 0$ oberhalb dieser Ebene eingeschlossen wird. Bestimmen Sie dazu zuerst die Schnittlinie der Funktion $f(x, y)$ mit der Ebene und überlegen Sie sich dann eine sinnvolle Aufteilung der Integrationsgrenzen. (10 Punkte)

Aufgabe 38: Integrationen über Kugelvolumina (Votieraufgabe)

a) Das Integral zur Bestimmung des Volumens einer Kugel mit dem Radius R kann in kartesischen Koordinaten mit

$$V = \int_{-R}^{R} \mathrm{d}z \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{R^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-z^2-y^2}} \mathrm{d}x \, 1 \; , \tag{1}$$

d.h. mit der Funktion $f(x, y, z) = 1$, berechnet werden. Begründen Sie die Wahl der Integrationsgrenzen und berechnen Sie das Integral explizit. (5 Punkte)

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Jacobi-Determinante, dass das Volumenelement in den Kugelkoordinaten r, ϑ und φ aus der Vorlesung

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi$$

lautet. (2 Punkte)

c) Das Integral (1) lautet in Kugelkoordinaten

$$V = \int_0^R r^2 \mathrm{d}r \int_0^\pi \sin(\vartheta) \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; . \tag{2}$$

Berechnen Sie es explizit. (3 Punkte)

d) Berechnen Sie in Kugelkoordinaten das Integral über die Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{\exp(-a(x^2 + y^2 + z^2))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad \text{mit } a > 0 \; ,$$

wobei das Integrationsgebiet eine Kugel mit Radius R sein soll. Wie lautet das Ergebnis im Grenzfall $R \to \infty$? (5 Punkte)

e) Berechnen Sie für das gleiche Integrationsgebiet bei endlichem R das Integral über die Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^\nu} = \frac{1}{r^\nu} \; .$$

Stellen Sie fest, für welche Werte von ν das Integral konvergiert. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem, das Sie in Aufgabe 7 b) erhalten haben. (5 Punkte)

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik”
Wintersemester 2016/17
Antworten zu den schriftlichen Aufgaben des Aufgabenblatts 11

Name: ______________________ Übungsgruppe: __________

Antwort zu Aufgabe 36

a) Das Volumenelement lautet:

- ❍ $\mathrm{d}V = \mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$
- ❍ $\mathrm{d}V = \varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$
- ❍ $\mathrm{d}V = \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$
- ❍ $\mathrm{d}V = \varrho^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$
- ❍ $\mathrm{d}V = \sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$
- ❍ $\mathrm{d}V = \varrho\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$
- ❍ $\mathrm{d}V = z\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$
- ❍ $\mathrm{d}V = z^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$

b) Die Integrationsgrenzen sind:

- ❍ $\varrho:\ 0\ldots\infty;\quad \varphi:\ 0\ldots\pi/2;\quad z:\ 0\ldots\infty$
- ❍ $\varrho:\ 0\ldots R;\quad \varphi:\ 0\ldots 2\pi;\quad z:\ -L\ldots L$
- ❍ $\varrho:\ 0\ldots R;\quad \varphi:\ 0\ldots\pi;\quad z:\ 0\ldots L$
- ❍ $\varrho:\ 0\ldots R;\quad \varphi:\ 0\ldots\pi;\quad z:\ -L\ldots L$
- ❍ $\varrho:\ 0\ldots\infty;\quad \varphi:\ 0\ldots 2\pi;\quad z:\ 0\ldots 2L$
- ❍ $\varrho:\ 0\ldots R;\quad \varphi:\ 0\ldots 2\pi;\quad z:\ 0\ldots 2L$
- ❍ $\varrho:\ 0\ldots R;\quad \varphi:\ 0\ldots\pi/4;\quad z:\ -L\ldots L$
- ❍ $\varrho:\ 0\ldots 2R;\quad \varphi:\ 0\ldots 2\pi;\quad z:\ 0\ldots L$

c) Die Gesamtmasse ist:

- ❍ $M = 2\pi R^2 L$
- ❍ $M = \pi\rho_\mathrm{M} R^3$
- ❍ $M = \pi\rho_\mathrm{M} R^2 L$
- ❍ $M = 2\pi\rho_\mathrm{M} R^2 L$
- ❍ $M = 2\pi\rho_\mathrm{M} R L^2$
- ❍ $M = \rho_\mathrm{M} R^2 L$
- ❍ $M = \pi\rho_\mathrm{M} R L^2/2$
- ❍ $M = 2\pi\rho_\mathrm{M} L^3$

d) Das Trägheitsmoment lautet:

- ❍ $I = M\dfrac{R^2+L^2}{12}$
- ❍ $I = \pi R^2 L\rho_\mathrm{M}\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{L^2}{3}\right)$
- ❍ $I = \dfrac{1}{4}\pi R^3 L^2\rho_\mathrm{M}$
- ❍ $I = M\left(\dfrac{R^2}{3}+\dfrac{L^2}{4}\right)$
- ❍ $I = M\left(\dfrac{R^2}{4}+\dfrac{L^2}{3}\right)$
- ❍ $I = 2\pi R^2 L\rho_\mathrm{M}\dfrac{R^2+L^2}{4}$
- ❍ $I = \pi R^3 L^2\rho_\mathrm{M}$
- ❍ $I = MRL$

Antwort zu Aufgabe 37

- Zur Schnittlinie der Funktion mit der x-y-Ebene:
  - ❍ Das angegebene Volumen ist nicht eindeutig beschrieben.
  - ❍ Die Schnittlinie der Funktion mit der x-y-Ebene ist ein Kreis um den Punkt $(x = 1, y = 2/3)$ mit Radius $r = \sqrt{2/3}$.
  - ❍ Die Gleichung $f(x, y) = 0$ war zu kompliziert für meinen Taschenrechner.
  - ❍ Zur Begrenzung des Volumens in der x-y-Ebene benötigt man zwei Kurven $y(x)$. Diese lauten[1]

    $y_1(x) =$ ____________________ und $y_2(x) =$ ____________________.
  - ❍ Die Schnittlinie von $f(x, y)$ mit der x-y-Ebene ist ein Kreis um den Ursprung mit Radius $r = \sqrt{12/5}$.

- Zu den Integrationsgrenzen:
  - ❍ $x : -\sqrt{12/5} \ldots \sqrt{12/5}; \quad y : -\sqrt{12/5 - x^2} \ldots \sqrt{12/5 - x^2}; \quad z : -f(x, y) \ldots f(x, y)$
  - ❍ $x : 1 - \sqrt{2/3} \ldots 1 + \sqrt{2/3}; \quad y : 2/3 - \sqrt{2/3 - (x - 1)^2} \ldots 2/3 + \sqrt{2/3 - (x - 1)^2};$ $z : 0 \ldots f(x, y)$
  - ❍ $x : -\sqrt{12/5} \ldots \sqrt{12/5}; \quad y : -\sqrt{12/5 - x^2} \ldots \sqrt{12/5 - x^2}; \quad z : 0 \ldots f(x, y)$
  - ❍ $x : -\sqrt{12/5} \ldots \sqrt{12/5}; \quad y : y_1(x) \ldots y_2(x); \quad z : 0 \ldots f(x, y)$ mit den Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ von oben

- Zum Wert des Integrals:
  - ❍ Das Integral lässt sich nur numerisch lösen. Der Näherungswert ist[1]: ____________________
  - ❍ Wolfram Alpha sagt, die Lösung sei[1]: ____________________
  - ❍ Das Integral lässt sich geschlossen lösen und hat den Wert[1]: ____________________
  - ❍ Das Integral divergiert.
  - ❍ Ich habe vorgeschlagen, die Aufgabe in Gruppenarbeit zu lösen, aber keine(r) der anderen wollte sie vorrechnen.
  - ❍ Ich bin nicht ganz sicher, ob das Ergebnis stimmt, weil[1] ____________________ immer so unsauber schreibt, aber ich habe in seiner/ihrer[2] Lösung entziffert[1]: ____________________

- Allgemein zur Aufgabe:
  - ❍ Sie eignet sich besonders als Prüfungsaufgabe, weil[1] ____________________

    ____
  - ❍ Ich würde sie lieber nicht in einer Prüfung bearbeiten müssen, weil[1] ____________________

    ____

[1] Ergänzen Sie den richtigen Eintrag, sofern diese Aussage zutreffend ist.
[2] Unzutreffendes bitte streichen.