Übungen zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik"
Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 12

Ausgabe:	Donnerstag, 12. Januar 2017
Abgabe der schriftlichen Lösungen:	Donnerstag, 19. Januar 2017
Besprechung:	25./26./27. Januar 2017

Aufgabe 39: Weitere Gewöhnung an Zylinder- und Kugelkoordinaten (schriftlich)

a) Skizzieren Sie eine Kugeloberfläche. Wählen Sie einen beliebigen Punkt auf dieser Fläche aus und zeichnen Sie die r-Linie (ϑ und φ sind konstant), die ϑ-Linie und die φ-Linie durch diesen Punkt ein. Fügen Sie die Basisvektoren $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\vartheta$ und $\boldsymbol{e}_\varphi$ in Ihrem gewählten Punkt hinzu. (2 Punkte)

b) Betrachten Sie den Punkt p mit den kartesischen Koordinaten $\boldsymbol{r}_p = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \sqrt{2}\boldsymbol{e}_z$ und geben Sie die kartesischen Komponenten der Basisvektoren $\boldsymbol{e}_\varrho$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ und $\boldsymbol{e}_z$ der Zylinderkoordinaten sowie $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\vartheta$ und $\boldsymbol{e}_\varphi$ der Kugelkoordinaten in p an. (4 Punkte)

c) Die drei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ mit den kartesischen Komponenten

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

sind im Punkt p verankert. Geben Sie ihre Komponenten am Punkt p in Zylinder- und Kugelkoordinaten an. (4 Punkte)

d) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(t)\boldsymbol{e}_r(t)$$

in Kugelkoordinaten und drücken Sie ihn in der Basis $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\vartheta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ aus. (3 Punkte)

Aufgabe 40: Linienintegrale in zwei Dimensionen (schriftlich)

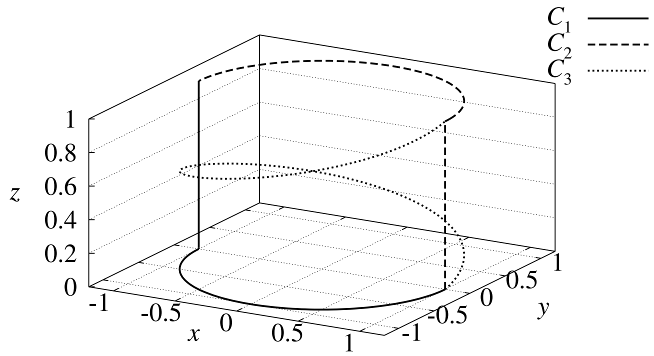
Betrachten Sie die parabelförmige Linie C mit $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ und $t \in [0, 1]$. Berechnen Sie die Linienintegrale

$$I_1 = \int_C \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} , \qquad \boldsymbol{I}_2 = \int_C xy \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} , \qquad I_3 = \int_C \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}} \, \mathrm{d}s , \qquad I_4 = \int_C \mathrm{d}s ,$$

wobei s die Bogenlänge ist. (7 Punkte)

Aufgabe 41: Arbeitsintegrale in drei Dimensionen (Votieraufgabe)

a) Betrachten Sie die drei folgenden Wege C_1, C_2 und C_3 entlang der Außenhülle eines Zylinders mit dem Radius $R = 1$ und der Höhe $h = 1$, dessen Mittelpunkt der Grundfläche im Ursprung des Koordinatensystems liegt: Der Weg C_1 führt vom Punkt $(x = 1, y = 0, z = 0)$ entlang des vorderen, unteren Kreisbogens zum Punkt $(-1, 0, 0)$ und anschließend senkrecht nach oben zu $(-1, 0, 1)$. Der zweite Weg C_2 führt von $(1, 0, 0)$ senkrecht nach oben zu $(1, 0, 1)$ und dann entlang des hinteren, oberen Kreisbogens zu $(-1, 0, 1)$. Ausgehend von $(1, 0, 0)$ führt der Weg C_3 mit konstanter Steigung pro Winkel ein Mal um den Zylindermantel zu $(1, 0, 1)$. Geben Sie eine Parametrisierung der drei Wege an. (5 Punkte)



b) Berechnen Sie für die beiden Kraftfelder

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{e}_z \,, \qquad \boldsymbol{F}_2 = \varrho \boldsymbol{e}_\varphi$$

die Arbeitsintegrale entlang der Wege C_1, C_2 und C_3. (8 Punkte)

c) Kombinieren Sie die Wege C_1 und C_2 zu einem geschlossenen Weg und geben Sie das Ergebnis der Arbeitsintegrale über diese Kombination für $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ an. Sie müssen dafür keine neue Integration durchführen. Warum? Was stellen Sie fest? (3 Punkte)

Aufgabe 42: Oberfläche einer Kugel (Votieraufgabe)

Eine Fläche ist ein zweidimensionales Objekt und lässt sich, auch wenn sie gekrümmt ist, durch zwei Parameter beschreiben. In Kugelkoordinaten erhält man z.B. die gesamte Oberfläche einer Kugel, indem man die Koordinate $r = R$ konstant hält, wobei R der Radius der Kugel ist, und alle möglichen Werte für die beiden Winkel ϑ und φ einsetzt. Berechnen Sie den Flächeninhalt

$$\int_A \mathrm{d}A = \int_A \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \right| \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi$$

der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R in Kugelkoordinaten. (4 Punkte)