Übungen zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik"
Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 13

Ausgabe:	Donnerstag, 19. Januar 2017
Abgabe der schriftlichen Lösungen:	Donnerstag, 26. Januar 2017
Besprechung:	1./2./3. Februar 2017

Aufgabe 43: Oberflächenintegrale (schriftlich)

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$I_1 = \int_A \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

wobei $\boldsymbol{r}$ der Ortsvektor ist und die Fläche A durch $z = a^2 - x^2 - y^2$ mit $z \geq 0$ gegeben ist. Zeigen Sie dazu, dass sich die Fläche durch $x = a \sin\vartheta \cos\varphi$, $y = a \sin\vartheta \sin\varphi$, $z = a^2 \cos^2\vartheta$ parametrisieren lässt und berechnen Sie das Integral. (4 Bonuspunkte)

b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ z+1 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche des Kegels, der durch die Punktmenge $\{(x, y, z)|0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ beschrieben wird. (8 Punkte)

Aufgabe 44: Etwas mehr Übung kann nicht schaden (schriftlich)

a) Bilden Sie die Ableitungen

$$\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} \frac{1}{x^2} \sinh(x^2 y) \ , \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y(x)) \ , \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y(x)) \ , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y(x)) \ , \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x, y(x)) \ ,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{q}(t), t) \ ,$$

wobei $f(x, y(x)) = \frac{y(x)}{x}$ und $\boldsymbol{p}(t), \boldsymbol{q}(t) \in \mathbb{R}^3$. (6 Punkte)

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und (nicht normierten) Eigenvektoren folgender Matrix. Achten Sie darauf, dass Sie einen Eigenvektor sofort identifizieren können und Sie sich anschließend auf ein 3×3-Problem beschränken können. Es gilt $a^2 \neq b^2$. (6 Punkte)

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & b & 0 \\ 0 & -b & -a & a \\ 0 & 0 & a & -a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 45: Beispiele zur Divergenz und zur Rotation (Votieraufgabe)

a) Gehen Sie vom Potential $V(r) = \frac{1}{4}r^2 = \frac{1}{4}|\boldsymbol{r}|^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2)$ aus und bilden Sie daraus den Kraftvektor $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(r)$. Skizzieren Sie das Vektorfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ in der x-y-Ebene ($z = 0$). Berechnen Sie explizit die Divergenz und die Rotation von $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$. (5 Punkte)

b) Skizzieren Sie das Vektorfeld

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} x + y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

in der x-y-Ebene. Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation von $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$. (4 Punkte)

Aufgabe 46: Beispiele aus der Elektrodynamik (Votieraufgabe)

In der Elektrodynamik lassen sich mit Hilfe der Zusammenhänge

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \; ,$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$$

die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ und die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ aus einem skalaren Potential $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ und einem Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ gewinnen.

a) Ein statischer (keine Zeitabhängigkeit) elektrischer Dipol lässt sich durch das skalare Potential

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

mit $r = |\boldsymbol{r}|$ und $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ beschreiben. Dabei ist $\boldsymbol{p}$ unabhängig von $\boldsymbol{r}$. Geben Sie das zugehörige elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ an. (5 Punkte)

b) Ein statischer magnetischer Dipol lässt sich durch das Vektorpotential

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

und $\phi = 0$ ausdrücken. Dabei ist $\boldsymbol{m}$ unabhängig von $\boldsymbol{r}$. Berechnen Sie die magnetische Flussdichte $\boldsymbol{B}$. (5 Bonuspunkte)

c) Im Vakuum lässt sich für das Vektorpotential die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \Delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c aufstellen. Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A}_0 \exp(\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t))$$

für $|\boldsymbol{k}| = \omega/c$ eine Lösung der Wellengleichung ist. Geben Sie für diesen Fall $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ an, wobei $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{k}$, und ω weder von $\boldsymbol{r}$ noch von t abhängen. Welchen Winkel schließen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ ein? (6 Punkte)