Übungen zur Vorlesung „Mathematische Methoden der Physik"
Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 15
Dieses Blatt soll zum selbständigen Wiederholen einiger Themen aus der Vorlesung dienen. Es wird nicht in den Übungen besprochen, die Lösungen sind im Web zugänglich. Die Aufgaben wurden so ausgewählt, dass man möglichst vielen Themen der Vorlesung begegnet und sie in Erinnerung rufen kann. Natürlich können nicht alle angesprochen werden. Dieses Blatt stellt *keine* Auswahl oder Einschränkung von Aufgabentypen für die Klausur dar.

Aufgabe 51: Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

a) Berechnen Sie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{x^2} , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(t^3) , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}u^2\tanh(u) , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

b) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\int \sinh(2-x)\,\mathrm{d}x , \qquad \int 3t^2\mathrm{e}^{t^3}\,\mathrm{d}t , \qquad \int \frac{1}{2}u^2\cos(u)\,\mathrm{d}u , \qquad \int \frac{\cos^3(\varphi)}{1-\sin(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi$$

c) Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\sin(y)\,\mathrm{d}y , \qquad \int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(\pi)} \sin(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 52: Potenzreihenentwicklung

Aus der speziellen Relativitätstheorie folgt, dass die Energie E eines Teilchens der Masse m, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

lautet. Entwickeln Sie diesen Ausdruck in eine Taylorreihe in der Geschwindigkeit bis zur Ordnung v^4. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ mit der klassischen kinetischen Energie $E_{\mathrm{kl}} = \frac{1}{2}mv^2$.

Aufgabe 53: δ-Funktion

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit der Diracschen δ-Funktion oder ihrer Ableitung:

$$\int_0^3 (5x-2)\delta(x-2)\,\mathrm{d}x\ , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)\delta(-2x)\,\mathrm{d}x\ , \quad \int_{-3}^{3} \mathrm{e}^{3x}\delta'(x)\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 54: Komplexe Zahlen

a) Finden Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$z^2 = \mathrm{i}\ , \qquad \mathrm{e}^z - 1 = \mathrm{i}\ , \qquad z^{\frac{1}{1-\mathrm{i}}} = 1+\mathrm{i}\ , \qquad \tanh(z) = -\mathrm{i}$$

b) Beweisen Sie, dass $\sin^2(x) = (1-\cos(2x))/2$.

Aufgabe 55: Gewöhnliche Differentialgleichungen

a) Bestimmen Sie die Lösung mit $y(0) = y(\pi) = 0$ und $y'(0) = y'(\pi) = 2$ der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + 8y''(x) + 16y(x) = 0\,.$$

b) Geben Sie die allgemeine komplexe Lösung der Differentialgleichung

$$y'''(x) - 5y''(x) + 8y'(x) - 4y(x) = \mathrm{e}^x - 3x^2$$

an.

c) Finden Sie die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen

$$(1+x^2)y'(x) + 6xy(x) = 2x\ , \qquad 3tz(t)^2\dot{z}(t) + 3z(t)^3 = 1\ .$$

Aufgabe 56: Vektoren

a) Zeigen Sie, dass die Basis $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\vartheta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ der Kugelkoordinaten orthogonal ist.

b) Geben Sie die Komponenten des Vektors

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in Zylinderkoordinaten für jeden beliebigen Referenzpunkt mit den Koordinaten ϱ_0, φ_0, z_0 an.

Aufgabe 57: Eigenwerte und Eigenvektoren

a) Berechnen Sie für die parameterabhängige Matrix

$$\boldsymbol{M}(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & -1 \end{pmatrix} , \quad \kappa \in \mathbb{C}$$

die Eigenwerte und je einen zugehörigen Eigenvektor.

b) Zeigen Sie, dass die beiden berechneten Eigenvektoren für $\kappa \to \mathrm{i}$ identisch werden. Zeigen Sie weiterhin, dass es in diesem Fall tatsächlich nur einen Eigenvektor zum doppelten Eigenwert gibt, indem Sie für $\boldsymbol{M}(\mathrm{i})$ noch einmal direkt die Eigenwerte und Eigenvektoren ausrechnen.

c) Zeigen Sie, dass Sie nun aber einen weiteren Vektor $\boldsymbol{w}$ finden können, der zusammen mit dem einzigen Eigenvektor $\boldsymbol{v}$ zum einzigen Eigenwert λ die Relation

$$(\boldsymbol{M}(\mathrm{i}) - \lambda \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$$

mit der Identität $\boldsymbol{E}$ erfüllt. Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 58: Differential- und Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher

a) Berechnen Sie die folgenden Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} t^u , \qquad \frac{\partial}{\partial u} t^u , \qquad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \mathrm{e}^x \cos(y) .$$

b) Überprüfen Sie, ob das Differential

$$\mathrm{d}f = (2xy - z^3)\mathrm{d}x + x^2 \mathrm{d}y - (3xz^2 + 1)\mathrm{d}z$$

vollständig ist und geben Sie gegebenenfalls eine Funktion $f(x, y, z)$ an, aus der das Differential folgt.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Fläche, die von den Funktionen

$$y_1(x) = x^2 + 2x + 1 , \qquad y_2(x) = 3x + 1$$

eingeschlossen wird. Berechnen Sie die x- und die y-Komponente des Schwerpunktes der Fläche durch die Integrale

$$s_x = \frac{1}{A} \int_A x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y , \qquad s_y = \frac{1}{A} \int_A y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y .$$

d) Berechnen Sie das Volumen, das von der Ebene $z = 0$ und der Fläche $x^2 + y^2 + z = 1$, $z > 0$ eingeschlossen wird.

e) Berechnen Sie die totale Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y)$$

mit $f(x, y) = x^2 + 3xy$ und $y(x) = \arcsin(x)$.

f) Berechnen Sie die totale Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} f(u,v) \qquad \text{mit} \quad f(u,v) = \mathrm{e}^{-u^2-v^2} \;, \quad u(a) = e^{a} \;, \quad v(a) = e^{-a} \;.$$

Aufgabe 59: Vektoranalysis

a) Beweisen Sie die Relation

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$$

für die Vektorfelder $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$.

b) Bestimmen Sie für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x(4-2a) + y(a-3) + xy(8x - 4ax) \\ x(3a-5) + y(4-2a) + xy(8y - 4ay) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$

den Parameter a so, dass $\boldsymbol{A}$ ein Gradientenfeld wird. Wie lautet dann das Skalarfeld $\psi(x,y,z)$, für das gilt $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} \psi$? Welche Beziehung zu Aufgabe 58 b) erkennen Sie?

c) Berechnen Sie für eine Masse m im Gravitationsfeld der Erde mit der Kraft

$$\boldsymbol{F} = -\frac{Mm\mathrm{G}}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

die Arbeit, die notwendig ist, um die Masse vom Erdradius R senkrecht nach oben ins Unendliche zu befördern.

d) Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4y \\ x \\ 2z \end{pmatrix}$$

das Oberflächenintegral

$$\int_A (\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \;,$$

wobei A die Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ ist, direkt und unter Ausnutzung des Satzes von Stokes.

Aufgabe 60: Fourierreihen

a) Berechnen Sie sowohl die reelle als auch die komplexe Darstellung der Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) = \delta(x) \;, \qquad -\pi \leq x < \pi \;.$$

b) Für eine periodische Funktion

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i} n}{L} x\right)$$

seien die Fourierkoeffizienten c_n bekannt. Bestimmen Sie daraus die Fourierkoeffizienten d_n der Funktion

$$h(x) = g(x) \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \ .$$

Aufgabe 61: Fouriertransformation

Da die Fouriertransformation nicht abgefragt wird, besitzt diese Aufgabe keine Relevanz für die Prüfung. Sie existiert zur selbständigen Beschäftigung mit dem Thema.

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } -\pi \leq x \leq \pi \ , \\ 0 & \text{sonst} \ . \end{cases}$$

b) Beweisen Sie den Satz von Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\bar{\hat{g}}(k)\,\mathrm{d}k \ ,$$

wobei $\hat{f}(k)$ die Fouriertransformierte von $f(x)$ bezeichnet und $\bar{g}(x)$ die zu $g(x)$ komplex konjugierte Funktion ist.