Übungen zur Vorlesung „Nichtlineare Dynamik I", WS 2016/17

4. Übungsblatt vom 29. November 2016

Scheinkriterien: Je 50 % der Schriftlichen- und Votierpunkte, sowie Vorrechnen.
Schriftliche Abgaben sind in PDF-Form (möglichst ein Dokument) beim Tutor per Mail abzugeben. Dieses soll eventuelle Rechnungen und geforderte Diagramme enthalten und mögliche Fragen beantworten. Die zusätzliche Abgabe von Quellcode ist ebenfalls möglich, ersetzt jedoch nicht die Abgabe der Lösungen in PDF Form, sondern dient der Auffindung möglicher Fehler.

- **Tutor:** Matthias Feldmaier: matthias.feldmaier@itp1.uni-stuttgart.de

Abgabe: **11.12.2016** Besprechung: **13.12.2016**

Aufgabe 10: Intermittenz **schriftlich, 10 Punkte**

(a) Berechnen Sie numerisch die Folge der Iterierten x_n der logistischen Abbildung $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ für Parameterwerte r knapp unterhalb des Wertes $r_c = 1+\sqrt{8}$, bei dem ein stabiler Zyklus der Periode drei entsteht. Beobachten Sie, wie sich die Folge bei Annäherung an r_c verändert.

(b) Im oberen Teil des Fensters der Periode drei liegt ein chaotischer Attraktor vor, der aus drei Bändern besteht. Bei einem kritischen Parameterwert $r'_c \approx 3,857$ vereinigen sich die drei Bänder plötzlich zu einem einzigen Band. Beschreiben Sie das Verhalten der Folge knapp oberhalb von r'_c.

Aufgabe 11: Kaplan-Yorke-Abbildung **10 Punkte**

Betrachten Sie die zweidimensionale Abbildung

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 3x_n \bmod 1 \,, \\ y_{n+1} &= \lambda y_n + 2\cos(2\pi x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

mit $0 \le x_n \le 1$ und $|\lambda| < 1$.

(a) Es sei R das Rechteck $0 \le x \le 1$, $|y| \le 2/(1-|\lambda|)$. Zeigen Sie, dass R durch die Abbildung (1) in sich abgebildet wird.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge für $|\lambda| < 1/3$ und für alle Anfangsbedingungen in R gegen einen Attraktor konvergiert, der das Maß Null hat.

Bitte wenden!

Aufgabe 12: Hénon-Abbildung **schriftlich, 10 Punkte**

Schreiben Sie ein Programm, das den größten Ljapunov-Exponenten für die Hénon-Abbildung

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - a x_n^2 + y_n \ , \\ y_{n+1} &= b x_n \end{aligned} \tag{2}$$

mit reellen Parametern a und b und $|b| < 1$ berechnet. Berechnen Sie den Ljapunov-Exponenten für $a = 1,4$ und b zwischen 0 und $0,3$ mit dem Startpunkt $x_0 = y_0 = 0$.

Hinweis:
Wenn $\mathbf{M}(x, y)$ die Linearisierung der Abbildung (2) bezeichnet und $\vec{u}_{n+1} = \mathbf{M}(x_n, y_n) \cdot \vec{u}_n$ mit einem beliebigen Einheitsvektor $\vec{u}_0$, dann ist der größte Ljapunov-Exponent gegeben durch

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln |\vec{u}_n| \ .$$

In der Praxis müssen Sie die Vektoren $\vec{u}_n$ nach jedem Iterationsschritt auf die Länge 1 normieren. (Warum?) Überlegen Sie, wie Sie den Ljapunov-Exponenten aus den dazu nötigen Normierungsfaktoren berechnen können.