Übungen zur Vorlesung „Nichtlineare Dynamik I", WS 2016/17

6. Übungsblatt vom 10. Januar 2017

Scheinkriterien: Je 50 % der Schriftlichen- und Votierpunkte, sowie Vorrechnen.
Schriftliche Abgaben sind in PDF-Form (möglichst ein Dokument) beim Tutor per Mail abzugeben. Dieses soll eventuelle Rechnungen und geforderte Diagramme enthalten und mögliche Fragen beantworten. Die zusätzliche Abgabe von Quellcode ist ebenfalls möglich, ersetzt jedoch nicht die Abgabe der Lösungen in PDF Form, sondern dient der Auffindung möglicher Fehler.

- **Tutor:** Matthias Feldmaier: matthias.feldmaier@itp1.uni-stuttgart.de

Abgabe: **22.01.2017** Besprechung: **24.01.2017**

Aufgabe 15: Kettenbrüche **10 Punkte**

(a) Berechnen Sie die periodischen Kettenbrüche

$$1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} \quad \text{und} \quad 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}} .$$

(b) Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklungen der Zahlen 41/16, $\sqrt{10}$, $\sqrt{8}$ und $\sqrt{6}$.

(c) Für welche natürlichen Zahlen N hat $\sqrt{N}$ eine Kettenbruchentwicklung mit der Periode 1, d.h.

$$\sqrt{N} = K + \cfrac{1}{n + \frac{1}{n + \dots}}$$

mit natürlichen Zahlen K und n?

Aufgabe 16: Teufelsstiege **schriftlich, 10 Punkte**

Berechnen Sie die „Teufelsstiege", die die Windungszahl der Kreisabbildung für $K = 1$ als Funktion von Ω darstellt.

Aufgabe 17: Arnold-Zungen **10 Punkte**

Betrachten Sie die Kreisabbildung

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n) \quad \text{mod } 1 .$$

Zeigen Sie, dass Modenkopplung zur Windungszahl $w = 1/2$ in einem Intervall $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$ existiert, wobei für kleine K gilt

$$\Omega_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{K^2}{8\pi} + \mathcal{O}(K^3) .$$

Bitte wenden!

Aufgabe 18: Getriebenes Pendel **schriftlich, 10 Punkte**

Wir betrachten ein gedämpftes Pendel, das von einer periodischen und einer konstanten Kraft getrieben wird:

$$\ddot{\theta} + \delta\,\dot{\theta} + \sin\theta = K + T\sin(\omega t)\ . \tag{1}$$

Der Phasenraum des Systems wird aufgespannt von den Variablen $x_1 = \dot{\theta}$, $x_2 = \theta \mod 2\pi$, $x_3 = \omega t \mod 2\pi$.

(a) Zeigen Sie, dass Volumina im Phasenraum mit der Zeit exponentiell schrumpfen.

(b) Zeigen Sie, dass Flächen in einer Schnittebene $x_3 = \text{const}$ mit jeder Iteration der Schnittabbildung kleiner werden.

(c) Sei $\theta_0(t)$ eine Lösung der Gleichung (1). Zeigen Sie, dass für $K = 0$ auch $-\theta_0(t + \pi/\omega)$ eine Lösung ist.

(d) Folgern Sie, dass für $K = 0$ keine quasiperiodischen Lösungen existieren, die einen Torus im Phasenraum dicht ausfüllen.