Übungen zur Vorlesung „Nichtlineare Dynamik I", WS 2016/17

7. Übungsblatt vom 24. Januar 2016

Scheinkriterien: Je 50 % der Schriftlichen- und Votierpunkte, sowie Vorrechnen.
Schriftliche Abgaben sind in PDF-Form (möglichst ein Dokument) beim Tutor per Mail abzugeben. Dieses soll eventuelle Rechnungen und geforderte Diagramme enthalten und mögliche Fragen beantworten. Die zusätzliche Abgabe von Quellcode ist ebenfalls möglich, ersetzt jedoch nicht die Abgabe der Lösungen in PDF Form, sondern dient der Auffindung möglicher Fehler.

- **Tutor:** Matthias Feldmaier: matthias.feldmaier@itp1.uni-stuttgart.de

Abgabe: **05.02.2016** Besprechung: **07.02.2016**

Aufgabe 19: Klassisches Modell des H-Atoms im elektrischen Feld 15 Punkte

Wir betrachten ein Wasserstoffatom im elektrischen Feld, bei dem das Elektron dem Coulomb-Feld des Kerns und einem homogenen elektrischen Feld $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_z$ mit $F > 0$ ausgesetzt sei. Das Potential lautet dann in atomaren Einheiten (mit $m_e = |e| = 1$):

$$V = -\frac{1}{r} + Fz$$

(a) Stellen Sie für diese Situation die klassische Hamiltonfunktion auf und transformieren Sie sie in parabolische Koordinaten (ξ, η, φ), die mit kartesischen Koordinaten durch

$$x = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi, \qquad y = \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi, \qquad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$$

verknüpft sind. Das Ergebnis lautet:

$$H = \frac{2}{\xi + \eta}\left(\xi\, p_\xi^2 + \eta\, p_\eta^2\right) + \frac{p_\varphi^2}{2\xi\eta} - \frac{2}{\xi + \eta} + \frac{F}{2}(\xi - \eta)$$

(b) Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung auf und zeigen Sie, dass sie in Parabelkoordinaten separiert, d.h. dass sie sich mit dem Ansatz

$$S(\xi, \eta, \varphi) = S_\xi(\xi) + S_\eta(\eta) + S_\varphi(\varphi)$$

lösen lässt. Stellen Sie S_ξ, S_η und S_φ als Integrale dar.

(c) Diskutieren Sie die Bewegung in den Koordinaten ξ und η qualitativ. Wann ist die Bewegung quasiperiodisch?

(d) Stellen Sie die Wirkungsvariablen des Systems als Integrale dar.

Bitte wenden!

Aufgabe 20: Zeitabhängiger harmonischer Oszillator **schriftlich, 15 Punkte**

(a) Transformieren Sie die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} q^2$$

des harmonischen Oszillators auf Wirkungs-Winkel-Variablen (J, ϑ). Zeigen Sie, dass eine erzeugende Funktion für die Transformation gegeben ist durch

$$F_1(q, \vartheta) = \frac{1}{2} \omega q^2 \cot \vartheta \; .$$

(b) Betrachten Sie nun einen harmonischen Oszillator mit langsam zeitabhängiger Frequenz

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2(\varepsilon t)}{2} q^2 \; ,$$

wobei $\omega(\tau)$ eine gegebene Funktion und ε ein kleiner Parameter ist.

Für den Oszillator mit konstanter Frequenz ist die Wirkungsvariable J Konstante der Bewegung. Bestimmen Sie störungstheoretisch eine Größe J_1, die bei zeitabhängiger Frequenz in erster Ordnung in ε erhalten ist.

Anleitung: Transformieren Sie die Hamiltonfunktion auf Wirkungs-Winkel-Variablen (J, ϑ) bezüglich der momentanen Frequenz. Beachten Sie, dass dies eine zeitabhängige Transformation ist. Transformieren Sie weiter auf neue Variablen (J_1, ϑ_1) mit der erzeugenden Funktion

$$F_2 = J_1 \vartheta + \varepsilon S_1(J_1, \vartheta, \varepsilon t)$$

und bestimmen Sie S_1 geeignet.

(c) Rechnen Sie explizit nach, dass $\dot{J}_1 = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ist.