Übungen zur Vorlesung „Nichtlineare Dynamik II“, SS 2017

2. Übungsblatt vom 27.04.2017

Scheinkriterien: Je 50 % der Schriftlichen- und Votierpunkte, sowie Vorrechnen.
Schriftliche Abgaben sind in PDF-Form (möglichst ein Dokument) beim Tutor per Mail abzugeben. Dieses soll eventuelle Rechnungen und geforderte Diagramme enthalten und mögliche Fragen beantworten. Die zusätzliche Abgabe von Quellcode ist ebenfalls möglich, ersetzt jedoch nicht die Abgabe der Lösungen in PDF Form, sondern dient der Auffindung möglicher Fehler.

- Matthias Feldmaier: matthias.feldmaier@itp1.uni-stuttgart.de

Abgabe: **07.05.2017** Besprechung: **10.05.2017**

Aufgabe 3: Stabilität periodischer Bahnen **schriftlich, 10 Punkte**

Beim Wasserstoffatom im Magnetfeld existiert für $E < 0$ eine zum Magnetfeld parallele periodische Bahn. Wir wollen die Stabilitätseigenschaften dieser Bahn untersuchen.

(a) Lösen Sie für diese Bahn explizit die regularisierten Bewegungsgleichungen in semiparabolischen Koordinaten $\mu = \sqrt{r+z}$, $\nu = \sqrt{r-z}$, die sich aus der Hamiltonfunktion (bei Magnetfeldstärke $B = 1$)

$$H = \frac{1}{2}(p_\mu^2 + p_\nu^2) - E(\mu^2 + \nu^2) + \frac{1}{8}\mu^2\nu^2(\mu^2 + \nu^2) = 2 \tag{1}$$

ergeben. Bestimmen Sie die Periode τ_0 der regularisierten „Zeit“ und die physikalische Periodendauer T der Bahn (mit $\mathrm{d}t = 2r\mathrm{d}\tau$) in Abhängigkeit von der Energie E.

(b) Um die Stabilität der Bahn zu untersuchen, nehmen Sie an, dass das Elektron sich nicht exakt auf der z-Achse bewegt, sondern nur in der Nähe der Achse. Dann ist $\nu(\tau)$ klein. Stellen Sie eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\nu(\tau)$ auf.
Hinweis: Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen in ν bzw. p_ν und setzen Sie für $\mu(\tau)$ Ihre Lösung aus Aufgabenteil (a) ein. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für ν mit der Substitution $x = \sqrt{-2E}\,\tau$ die Form

$$\frac{d^2\nu}{dx^2} = -\left(1 - \frac{1}{2E^3}\sin^4 x\right)\nu \tag{2}$$

annimmt.

Aufgabe 3: Stabilität periodischer Bahnen **votier, 20 Punkte**

(c) Die Monodromiematrix für die Bahn parallel zum Magnetfeld ist gegeben durch die Abbildung (mit $\nu'(\tau) = p_\nu(\tau)$)

$$\begin{pmatrix} \nu(\tau_0) \\ \nu'(\tau_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu(0) \\ \nu'(0) \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Drücken Sie die Einträge der Monodromiematrix durch zwei linear unabhängige Lösungen der Gleichung (2) und ihre Ableitungen aus.

(d) Zeigen Sie: Für die Elemente der Monodromiematrix gilt $m_{11} = m_{22}$.
Hinweis: Was erhalten Sie für die Monodromiematrix, wenn die Bahn rückwärts durchlaufen wird?

(e) Lösen Sie die Gleichung (2) mit geeigneten Anfangsbedingungen numerisch und bestimmen Sie die Spur der Monodromiematrix und den Liapunov-Exponenten der Bahn als Funktion der skalierten Energie. In welchen Energiebereichen ist die Bahn stabil bzw. instabil?