Übungen zur Vorlesung „Nichtlineare Dynamik II“, SS 2017

4. Übungsblatt vom 24.05.2017

Scheinkriterien: Je 50 % der Schriftlichen- und Votierpunkte, sowie Vorrechnen.
Schriftliche Abgaben sind in PDF-Form (möglichst ein Dokument) beim Tutor per Mail abzugeben. Dieses soll eventuelle Rechnungen und geforderte Diagramme enthalten und mögliche Fragen beantworten. Die zusätzliche Abgabe von Quellcode ist ebenfalls möglich, ersetzt jedoch nicht die Abgabe der Lösungen in PDF Form, sondern dient der Auffindung möglicher Fehler.

- Matthias Feldmaier: matthias.feldmaier@itp1.uni-stuttgart.de

Abgabe: **11.06.2017** Besprechung: **14.06.2017**

Aufgabe 7: Kreisbillard (Torusquantisierung) 20 schriftliche Punkte

Wir betrachten ein Punktteilchen der Masse $m = 1$, das sich in einem kreisförmigen Billardtisch mit Radius $R = 1$ bewegt: Im Inneren des Tisches bewegt es sich frei, wenn es an die Wand trifft, wird es elastisch reflektiert.

(a) Stellen Sie die Hamiltonfunktion des Systems in Polarkoordinaten auf.
Hinweis: Die Hamiltonfunktion kann zunächst nur die freie Bewegung (ohne Reflexionen) beschreiben.

(b) Zeigen Sie, dass das Kreisbillard separabel ist. Berechnen Sie die Wirkungsintegale, wobei Sie $p_\varphi = L$ setzen.
Hinweis: Im Wirkungsintegral I_ρ muss nun der Tischrand bei der Bestimmung der Integrationsgrenzen (Umkehrpunkte) berücksichtigt werden.

(c) Geben Sie die semiklassischen Quantisierungsbedingungen für das Kreisbillard an. Drücken Sie die Bedingungen durch die Wellenzahl $k = \sqrt{2E}$ (mit $\hbar = 1$ gesetzt) aus.
Hinweis: Überlegen Sie sich, dass der Maslov-Index für die Radialbewegung $\alpha_\mathrm{r} = 3$ ist. Welche Randbedingungen muss die quantenmechanische Wellenfunktion an den Umkehrpunkten erfüllen? Welche Phasensprünge sind deshalb nötig?

(d) Bestimmen Sie alle semiklassischen Eigenwerte für die Wellenzahl k bis $k_\mathrm{max} = 10$ numerisch über das Newton-Verfahren. Für einen Teil der Eigenwerte lassen sich auch analytisch Lösungen finden. Geben Sie diese zusätzlich an.

Aufgabe 8: Teilchen in einem nicht zentralen Kraftfeld **10 Punkte**

Betrachten Sie die klassische Bewegungs eines Teilchens in einem Potential

$$V(\rho,\varphi) = \frac{3}{4}m\omega^2\rho^2 + \frac{a^2}{2m\rho^2}f(\varphi)$$

in 2 Dimensionen. Zeigen Sie, dass sich die Energie schreiben lässt als

$$E = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{1}{2m\rho^2}\left(p_\varphi^2 + a^2 f(\varphi)\right) + \frac{3}{4}m\omega^2\rho^2$$

und dass

$$p_\varphi^2 + a^2 f(\varphi) \equiv \alpha_\varphi^2$$

ein Integral der Bewegung ist. Berechnen Sie für den speziellen Fall

$$f(\varphi) = \frac{1}{\sin^2(3\varphi)}$$

die Wirkungsintegrale I_φ und I_ρ und schreiben Sie die Energie als Funktion dieser Größen. Führen Sie nun eine Torusquantisierung für das System durch und zeigen Sie, dass die semiklassischen Energieeigenwerte gegeben sind durch

$$E_{nl} = \sqrt{\frac{3}{2}}\omega\left(\left(2n + 3l + \frac{5}{2}\right)\hbar + a\right)$$

mit den Quantenzahlen $n, l = 0, 1, 2, \ldots$

Hinweise: Das Wirkungsintegral I_φ lautet

$$I_\varphi = \frac{2}{\pi}\int_{\varphi_1}^{\pi/6}\sqrt{a_\varphi^2 - \frac{a^2}{\sin^2(3\varphi)}}\,\mathrm{d}\varphi$$

mit der unteren Grenze φ_1 („Umkehrpunkt“). Warum kann man die obere Grenze $\pi/6$ verwenden? Der Term $\sin(3\varphi)$ lässt sich in Tangens-Ausdrücke umschreiben (siehe z.B. Bronstein u.a., Taschenbuch der Mathematik). Man erhält

$$I_\varphi = \frac{2}{\pi}\int_{\varphi_1}^{\pi/6}\frac{1}{\tan(3\varphi)}\sqrt{(a_\varphi^2 - a^2)\tan^2(3\varphi) - a^2}\,\mathrm{d}\varphi\ .$$

Jetzt führt die Substitution $x = \tan(3\varphi)$ weiter. Das nach einer zweiten Substitution $y = \sqrt{(a_\varphi^2 - a^2)x^2 - a^2}$ vorliegende Integral in y kann nach einer Partialbruchzerlegung leicht ausgewertet werden. (Gegebenenfalls schaue man in eine Integraltabelle). Transformiert man die Grenzen immer richtig mit, erhält man das Ergebnis $I_\varphi = \frac{1}{3}(a_\varphi - a)$.

Das Wirkungsintegral I_ρ sollte nach der Substitution $x = \rho^2$ und bei Verwendung einer einfachen Integraltabelle keine Probleme bereiten.