Übungen zur Vorlesung „Nichtlineare Dynamik II“, SS 2017

5. Übungsblatt vom 14.06.2017

Scheinkriterien: Je 50 % der Schriftlichen- und Votierpunkte, sowie Vorrechnen.
Schriftliche Abgaben sind in PDF-Form (möglichst ein Dokument) beim Tutor per Mail abzugeben. Dieses soll eventuelle Rechnungen und geforderte Diagramme enthalten und mögliche Fragen beantworten. Die zusätzliche Abgabe von Quellcode ist ebenfalls möglich, ersetzt jedoch nicht die Abgabe der Lösungen in PDF Form, sondern dient der Auffindung möglicher Fehler.

- Matthias Feldmaier: matthias.feldmaier@itp1.uni-stuttgart.de

Abgabe: **25.06.2017** Besprechung: **28.06.2017**

Aufgabe 9: Spurformel für das Wasserstoffatom — 10 schriftliche Punkte

Die Bindungszustände des Wasserstoffatoms liegen bei den Energien $E_n = -\frac{1}{2n^2}$ mit $n = 1, 2, \ldots$. Zeigen Sie, dass die Zustandsdichte dieses Systems für $E < 0$ dargestellt werden kann durch

$$g(E) = (-2E)^{-5/2} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi k}{\sqrt{-2E}} \right) \right) .$$

Berechnen Sie mit der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\vartheta^2}{2r^2} + \frac{p_\varphi^2}{2r^2 \sin^2(\vartheta)} - \frac{1}{r} = E$$

für einen Umlauf um eine Keplerellipse (mit $p_\vartheta = 0$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$) bei der Energie E die Wirkung S_{ppo} und zeigen Sie auf diese Weise, dass obiges Ergebnis als Summe über die klassischen periodischen Bahnen aufgefasst werden kann.

Hinweis: Transformieren Sie die δ-Funktionen in der Zustandsdichte so, dass Sie die Poissonsche Summenformel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i k x)$$

anwenden können. Beachten Sie die Entartungen der Niveaus.

Aufgabe 10: Kreisbillard (Spurformel und periodische Bahnen) — 20 Punkte

Die Berry-Tabor-Spurformel für zweidimensionale integrable Systeme lautet:

$$g(E) = \tilde{g}(E) + \frac{1}{\pi \hbar^{3/2}} \sum_{\vec{M}} \frac{T_{\vec{M}}(E)}{M_2^{3/2} |g_E''|^{1/2}} \cos\left(\frac{S_{\vec{M}}(E)}{\hbar} - \eta_{\vec{M}} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) .$$

Dabei erstreckt sich die Summe über alle rationalen Tori, deren Frequenzverhältnis durch die ganzen Zahlen $\vec{M} = (M_1, M_2)$ beschrieben ist. $S_{\vec{M}} = 2\pi (M_1 I_1 + M_2 I_2)$ ist die Wirkung einer periodischen Bahn, $T_{\vec{M}}$ ihre Periodendauer, der Maslov-Index $\eta_{\vec{M}}$ ist durch die Maslov-Indizes α_1, α_2 der Wirkungsvariablen I_1, I_2 gegeben als

$$\eta_{\vec{M}} = M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 - \Theta(g_E'') ,$$

und die Funktion $g_E(I_1)$ ist implizit definiert durch

$$H(I_1, I_2 = g_E(I_1)) = E .$$

Bitte wenden!

In dieser Aufgabe wollen wir die Spurformel für das Kreisbillard (mit Radius $R = 1$ und Masse $m = 1$, außerdem $\hbar = 1$) auswerten.

(a) In Aufgabe 7 haben Sie die Wirkungsvariablen $I_\varphi = L$ und

$$I_\rho = \frac{1}{\pi} \int_{\rho_{\min}}^{1} d\rho \sqrt{2E - \frac{L^2}{\rho^2}} = \frac{\sqrt{2E}}{\pi} \left(\sqrt{1 - \rho_{\min}^2} - \rho_{\min} \arccos \rho_{\min} \right)$$

mit $\rho_{\min} = |L|/\sqrt{2E}$ berechnet. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Frequenzen gegeben sind durch

$$\omega_\rho = \frac{2\pi E}{\sqrt{2E - L^2}} , \qquad \omega_\varphi = \frac{2E \operatorname{sign} L}{\sqrt{2E - L^2}} \arccos \frac{|L|}{\sqrt{2E}} .$$

Hinweis: Der Ausdruck $\omega_\varphi = \left.\frac{\partial H}{\partial I_\varphi}\right|_{I_\rho = \text{konst.}}$ lässt sich nicht direkt auswerten. Bestimmen Sie daher ω_φ über die Bedingung $\frac{\partial I_\rho}{\partial I_\varphi} = 0$.

(b) Für periodische Bahnen gilt

$$\frac{\omega_\varphi}{\omega_\rho} = \frac{M_\varphi}{M_\rho}$$

mit ganzen Zahlen M_φ und M_ρ. Skizzieren Sie die Bahnen für einige Werte von M_φ und M_ρ. Welche Bedingung müssen M_φ und M_ρ erfüllen?

Hinweis: Betrachten Sie hierzu die möglichen Werte des Drehimpulses L.

(c) Zeigen Sie, dass die Wirkung einer periodischen Bahn gegeben ist durch

$$S_{\vec{M}}(E) = \sqrt{8E} M_\rho \sin\left(\pi \frac{M_\varphi}{M_\rho}\right) .$$

(d) Zeigen Sie: Die Berry-Tabor Formel für die Zustandsdichte des Kreisbillards lautet ($\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} g(E) &= \tilde{g}(E) + g^{\text{osc}}(E) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi E}} \sum_{M_\varphi=1}^{\infty} \sum_{M_\rho=2M_\varphi}^{\infty} m_{\vec{M}} \frac{S_{\vec{M}}(E)^{3/2}}{M_\rho^2} \cos\left(S_{\vec{M}}(E) - \frac{3}{2} M_\rho \pi + \frac{\pi}{4}\right) , \end{aligned}$$

mit (Begründung?) $m_{\vec{M}} = \begin{cases} 1 & : \quad M_\rho = 2M_\varphi \\ 2 & : \quad M_\rho > 2M_\varphi \end{cases}$.

Hinweis: Setzen Sie $I_1 = I_\varphi$, $I_2 = I_\rho$.

(e) Berechnen Sie numerisch Partialsummen dieser Reihe im Energieintervall $E \in [0, 100]$, indem Sie die Reihe bei maximalen Werten für M_ρ und M_φ abschneiden (z.B. $M_\rho \leq 10$). Versuchen Sie, aus den Ergebnissen einzelne Energieeigenwerte zu bestimmen und vergleichen Sie diese mit den Ergebnissen der Torusquantisierung in Aufgabe 9 (mit $k = \sqrt{2E}$). Beobachten Sie, wie sich die Ergebnisse verändern, wenn Sie mehr Bahnen berücksichtigen.