Übungen zur Vorlesung „Physik auf dem Computer"
Sommersemester 2018

Übungsgruppenleiter:
Robin Bardakcioglu – `rhb@itp1.uni-stuttgart.de; Do. 14:00 - 15:30 Uhr, 5.331`
Johannes Reiff – `jreiff@itp1.uni-stuttgart.de; Di. 14:00 - 15:30 Uhr, 4.141`
Matthias Feldmaier – `fem@itp1.uni-stuttgart.de; Do. 14:00 - 15:30 Uhr, 4.141`

Übungsblatt 3 Ausgabe: 25. April 2018 Abgabe und Besprechung: KW 18
Übungsblatt 3 Ausgabe: 25. April 2018

Dienstagsübung: Besprechung 08.05.18
Donnerstagsübungen: Besprechung 03.05.18

Aufgabe 7: Numerisch stabiles Lösen quadratischer Gleichungen

In Aufgabe 3 haben wir bereits gesehen, dass es bei der Addition oder Subtraktion unterschiedlich großer Zahlen schnell zu numerischen Ungenauigkeiten kommen kann. Ein ähnliches Problem liegt vor, wenn wir die Differenz zweier fast gleich großer Zahlen bilden.

a) Erstellen Sie ein Programm zum Lösen der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

für $a = 1$, $c = 1$, $b = 10^i$ und verschiedene i. Vergleichen Sie die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

mit der analytischen Näherung

$$x_1 = -\frac{1}{b} + O(b^{-3}) \,, \qquad x_2 = -b + \frac{1}{b} + O(b^{-3})$$

für große b unter der Verwendung von Variablen vom Typ `double`.

b) Beobachten Sie, bis zu welchem i sie richtige Lösungen erhalten.

ToDo: Erstellen Sie eine Wertetabelle für i und $x_{1,2}$ mit der exakten Formel und mit obiger Näherung. Erklären Sie das Resultat.

(3 Punkt(e), Votier)

c) Implementieren Sie die folgende, numerisch korrekte Lösungsformel für quadratische Gleichungen und vergleichen Sie die Resultate mit denen der direkten Implementierung.

$$q = -\frac{1}{2}\left[b + \mathrm{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}\right] , \qquad x_1 = \frac{c}{q} , \qquad x_2 = \frac{q}{a}$$

ToDo: Erstellen Sie eine Wertetabelle für i und $x_{1,2}$ nach der numerisch korrekten Implementierung. Was ist jetzt anders?

(2 Punkt(e), Votier)

Aufgabe 8: Verschiedene Algorithmen für Differentialgleichungen

a) Holen Sie aus dem Webangebot zur Vorlesung das Programmpaket zu Aufgabe 8 und entpacken Sie es. Sie finden darin die Datei `ho_rk4.cc`, die für eine Integration der Differentialgleichung des harmonischen Oszillators vorbereitet ist. Sie ist der Datei zum Euler-Verfahren aus Aufgabe 4 sehr ähnlich, enthält aber leichte Abwandlungen. Machen Sie sich mit der Datei vertraut.

b) Fügen Sie den Runge-Kutta-Schritt 4. Ordnung in das Programm ein. Überzeugen Sie sich, dass Ihr Algorithmus funktioniert.

ToDo: Skizzieren Sie Ihren Algorithmus für den Runge-Kutta-Schritt in Pseudocode und erklären Sie seine Funktionsweise.

(4 Punkt(e), Votier)

c) Öffnen sie die Datei `ho_velocityverlet.cc`. Sie ist für einen Velocity-Verlet-Schritt vorbereitet. Fügen Sie diesen ein.

ToDo: Skizzieren Sie Ihren Algorithmus für den Velocity-Verlet-Schritt in Pseudocode und erklären Sie seine Funktionsweise.

(3 Punkt(e), Votier)

d) Berechnen Sie für identische Anfangsbedingungen mit allen drei Algorithmen (Euler aus Aufgabe 4, Runge-Kutta 4. Ordnung, Velocity-Verlet) jeweils mit dem Zeitschritt $\Delta t = 0{,}01$ und der Gesamtzeit $t_{\max} = 20$ die Funktion $x(t)$.

ToDo: Stellen Sie die drei Lösungen zusammen mit dem exakten Ergebnis in einem Diagramm dar.

(2 Punkt(e), Votier)

e) Stellen Sie die Gesamtenergie für alle drei Methoden und die exakte Bahn in einem Diagramm dar. Implementieren Sie dazu die Ausgabe der Gesamtenergie und verwenden Sie $\Delta t = 0{,}1$ sowie $t_{\max} = 2000$.

ToDo: Erstellen Sie ein zweites Diagramm, in dem das Euler-Verfahren nicht enthalten ist. Diskutieren Sie Ihre Beobachtung.

(3 Punkt(e), Votier)

Aufgabe 9: Gedämpftes, getriebenes Fadenpendel

Ein gedämpftes Fadenpendel der Masse m mit der Fadenlänge ℓ und der Dämpfungskonstanten γ, das von einer periodischen Kraft angetrieben wird, folgt der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = F_0\cos(\Omega t)\ .$$

a) Holen Sie aus dem Webangebot zur Vorlesung das Programmpaket zu Aufgabe 9 und entpacken Sie es. Sie finden darin die Datei `ho_3_verfahren.cc`, die die Integration der Differentialgleichung mit allen drei bisher behandelten Verfahren enthält. Die Integratoren und die Differentialgleichungen des harmonischen Oszillators wurden jeweils in eigene Funktionen ausgelagert, um die Integratoren möglichst flexibel zu halten. Sie können in dieser Form für beliebige Differentialgleichungssysteme erster Ordnung in `n` Dimensionen verwendet werden, nur die Differentialgleichung muss ausgetauscht werden. Beachten Sie, dass der Velocity-Verlet-Algorithmus eine eigene, eindimensionale Darstellung der Differentialgleichung benötigt. Schauen Sie sich die Algorithmen noch einmal an, um das zu verstehen.

   Das Programm greift auf die Objektorientierung aus C++ zurück und verwendet Klassen. Es basiert auf einer (recht) modernen Variante von C++ und wird deshalb wieder mit der C++11 Option kompilliert:

```
g++ -std=c++11 -o ho_3_verfahren.exe ho_3_verfahren.cc
```

   Machen Sie sich anhand der Kommentare mit der Funktionsweise des Programms vertraut und versuchen Sie, es zu verstehen.

b) Fügen Sie in das Programm anhand des Beispiels `DGL_HO` eine Funktion hinzu, die die Differentialglichung des Fadenpendels implementiert. Ändern Sie das Hauptprogramm so ab, dass nur diese DGL mit dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung gelöst wird.

   ToDo: Skizzieren Sie Ihre Implementierung der Differentialgleichung und Ihre Änderungen des Hauptprogramms als Pseudocode.

   (5 Punkt(e), Votier)

c) Erzeugen Sie für $\gamma = 0$, $F_0 = 0$, $\Omega = 0$ und $g = \ell$ ein Phasenraumdiagramm mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$ sowie $\dot\varphi(0) = 0{,}5; 1; 1{,}5; 2; 2{,}5; 3$.

   ToDo: Stellen Sie alle in einem Diagramm dar und diskutieren Sie dieses.

   (3 Punkt(e), Votier)

d) Wählen Sie nun $\gamma = 1/4$, $\Omega = 2/3$ und $g = \ell$ sowie die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0{,}2$ und $\dot\varphi(0) = 0$.

   ToDo: Berechnen Sie die Funktion $\varphi(t)$ für Zeiten $t_{\max} = 60$ und stellen Sie sie für mindestens drei verschiedene Werte $0 \le F_0 \le 1{,}3$ in einem Diagramm dar. Was beobachten Sie für $F_0 > 1{,}1$?

   (3 Punkt(e), Votier)