**Übungen zur Vorlesung „Physik auf dem Computer"**
**Sommersemester 2018**

Übungsgruppenleiter:
Robin Bardakcioglu – `rhb@itp1.uni-stuttgart.de; Do. 14:00 - 15:30 Uhr, 5.331`
Johannes Reiff – `jreiff@itp1.uni-stuttgart.de; Di. 14:00 - 15:30 Uhr, 4.141`
Matthias Feldmaier – `fem@itp1.uni-stuttgart.de; Do. 14:00 - 15:30 Uhr, 4.141`

**Übungsblatt 8** Ausgabe: 13. Juni 2018

**Dienstagsübung**: schriftliche Abgabe 17.06.18, Besprechung 19.06.18
**Donnerstagsübungen**: schriftliche Abgabe 19.06.18, Besprechung 21.06.18

**Aufgabe 21:** Diskrete Fouriertransformation

Die Fouriertransformierte $\hat{f}(k)$ einer Funktion $f(x)$ ist definiert als

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x \; .$$

Die Exponentialfunktion lässt sich gemäß $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$ umschreiben und damit lässt sich die Fouriertransformation zerlegen in die sogenannte Fouriersinus- und die Fourierkosinustransformation,

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f^{\mathrm{g}}(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x \; + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f^{\mathrm{u}}(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x \; ,$$

wobei

$$f^{\mathrm{g}}(x) = [f(x) + f(-x)]/2 \qquad \text{und} \qquad f^{\mathrm{u}}(x) = [f(x) - f(-x)]/2$$

der gerade bzw. ungerade Anteil von $f(t)$ sind. Bei der numerischen Behandlung liegt $f(x)$ nur noch als diskrete Reihe $f^{\mathrm{g,u}}_{n_x} = f^{\mathrm{g,u}}(n_x \Delta_x)$ mit $n_x = 0, 1, \ldots, N-1$ vor, wobei $\Delta_x$ die äquidistante Schrittweite ist. Die diskrete Fouriertransformierte $\hat{f}_{n_k} = \hat{f}(n_k \Delta_k)$ mit $\Delta_k = 2\pi/(N\Delta_x)$ ist damit definiert als

$$\begin{aligned} \hat{f}_{n_k} &= \frac{1}{N} \sum_{n_x=0}^{N-1} f^{\mathrm{g}}_{n_x} \cos\left(n_x n_k \Delta_x \Delta_k\right) + \frac{\mathrm{i}}{N} \sum_{n_x=0}^{N-1} f^{\mathrm{u}}_{n_x} \sin\left(n_x n_k \Delta_x \Delta_k\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n_x=0}^{N-1} f^{\mathrm{g}}_{n_x} \cos\left(\frac{2\pi}{N} n_x n_k\right) + \frac{\mathrm{i}}{N} \sum_{n_x=0}^{N-1} f^{\mathrm{u}}_{n_x} \sin\left(\frac{2\pi}{N} n_x n_k\right) \; . \qquad (1) \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie ein Programm, das die Fourierkosinustransformierte einer beliebigen diskret gegebenen Funktion $f_{n_x}$ mit $n_x = 0, 1, \ldots, N-1$ gemäß dem ersten Term in Gleichung (1) berechnet.

   **ToDo:** Skizzieren Sie ihr lauffähiges Programm in Pseudo-Code an der Tafel.
   **(8 Punkt(e), Votier)**

b) Berechnen Sie nun die Fourierkosinustransformierte von $\cos(2\pi n_x \Delta_x/\lambda)$ mit $\lambda = 25\Delta_x$ und $n_x = 0, 1, \ldots, 99$ für die Wellenzahl- oder Frequenzindizes $n_k = -200, -199, \ldots, 199, 200$.

**ToDo:** Stellen Sie ihr Spektrum vor. Was erscheint Ihnen als sinnvoller Bereich zur Darstellung des Spektrums? Haben Sie eine Erklärung dafür, warum jede darüber hinausgehende Information redundant sein muss?

**(3 Punkt(e), Votier)**

c) Implementieren Sie nun auch die Rücktransformation und zeigen Sie damit, dass die ursprüngliche Kosinusfunktion exakt reproduziert werden kann. Beziehen Sie nur den sinnvollen Bereich des Spektrums mit ein.

**ToDo:** Skizzieren Sie ihr lauffähiges Programm in Pseudo-Code an der Tafel.

**(4 Punkt(e), Votier)**

d) Berechnen Sie jetzt die Kosinustransformierte von $\cos(2\pi n_x \Delta_x/\lambda)$ mit $\lambda = 25\Delta_x$ für $n_x = 0, 1, \ldots, 94$. Wie unterscheidet sich das Spektrum von dem aus Teil b? Die Abweichung des ersten Spektrums vom zweiten Spektrum nennt man spektralen Abtastfehler.

**ToDo:** Wie kommt dieser Fehler zustande? Betrachten Sie dazu den Unterschied zwischen der Orignalfunktion und der Rücktransformation im Bereich $n_x = 0, 1, \ldots, 199$, indem Sie beide in einem Diagramm auftragen.

**(3 Punkt(e), Votier)**

e) Wiederholen Sie nun den Aufgabenteil b für $\lambda = 10\Delta_x, 5\Delta_x, 3\Delta_x, 2\Delta_x, 1{,}75\Delta_x, 0{,}75\Delta_x$. Ab einer bestimmten Wellenlänge beobachten Sie, dass der Peak im Spektrum eine Grenze, in der er eine sinnvolle Bedeutung hat, verlässt.

**ToDo:** Suchen Sie eine Erklärung für diesen Effekt und bestimmen Sie die Wellenzahl bzw. den Frequenzwert, bei der dieser Effekt erstmalig auftritt. Berechnen Sie diese kritische Frequenz (Nyquistfrequenz) $\nu_\mathrm{N} = k_\mathrm{N}/(2\pi)$.

**(2 Punkt(e), Votier)**

f) Überlegen Sie sich, welche Punkte bei der oben angegebenen Nyquist-Frequenz abgetastet werden.

**ToDo:** Erklären Sie diesen Effekt. Wie viele Punkte besitzt die Zeitreihe der Kosinusfunktion mit der Nyquistfrequenz pro Periode der Kosinusfunktion? Geben Sie eine Formel für die Nyquist-Frequenz an.

**(2 Punkt(e), Votier)**

g) Berechnen Sie die Kosinustransformierte der Gaußfunktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\sigma x^2} \tag{2}$$

mit $\sigma = 0{,}01$, $\Delta_x = 1$ und $n_x = 0, 1, \ldots, n$ mit $n = 99$ im Bereich von $-k_\mathrm{N} < k \leq k_\mathrm{N}$. Achten Sie darauf, dass Sie die Koeffizienten $f_{n_x}$ einer korrekten symmetrische Funktion für die Transformation verwenden, d.h. $f(-n_x\Delta_x) = f(n_x\Delta_x) = f((n - n_x)\Delta_x)$.

**ToDo:** Wie sieht das Spektrum aus? Wie ändert sich das Spektrum, wenn Sie $\sigma$ erhöhen? Erhöhen Sie dazu $\sigma$ sukzessive bis $\sigma \approx 2$. Für größere Werte von $\sigma$ ändert sich die Form des

Spektrums. Wie erklären Sie sich diesen Effekt? Beziehen Sie in Ihre Überlegungen auch die Ergebnisse aus Teil e mit ein.

**(4 Punkt(e), Votier)**