

**Aufgabe 4 : Kombination von aufeinander senkrecht stehenden Boosts**  
(schriftlich)

In dieser Aufgabe untersuchen wir, was passiert, wenn wir einen Boost in  $x$ -Richtung mit einem anschließenden Boost in  $y$ -Richtung kombinieren. Wir werden sehen, dass die resultierende Transformation kein reiner Boost mehr ist, sondern auch eine Rotation beinhaltet.

Gegeben seien die beiden Boosts

$$B_{(x)} = \begin{pmatrix} \gamma_x & -\gamma_x\beta_x & 0 & 0 \\ -\gamma_x\beta_x & \gamma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{(y)} = \begin{pmatrix} \gamma_y & 0 & -\gamma_y\beta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma_y\beta_y & 0 & \gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Bilden Sie das Produkt  $B_{(y)} \cdot B_{(x)}$ . An welcher Eigenschaft lässt sich erkennen, dass diese Transformation kein Boost mehr ist? (1 Punkt)

Im nächsten Schritt wollen wir  $B_{(y)} \cdot B_{(x)}$  in einen Boost und eine Rotation zerlegen. Aus Symmetriegründen muss diese Rotation in der  $xy$ -Ebene stattfinden. Bilden Sie deshalb die Transformation

$$B_{\text{Ges}} = R^{-1} \cdot B_{(y)} \cdot B_{(x)}, \quad (2)$$

mit der inversen Rotation

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

und bestimmen Sie den Winkel  $\vartheta$  so, dass  $B_{\text{Ges}}$  ein Boost ist. (2 Punkte)

Abschließend möchten wir die Geschwindigkeit und Richtung dieses Boosts bestimmen.

An welcher Komponente der Matrix lässt sich die Geschwindigkeit leicht ablesen? (1 Punkt)

Um die Boostrichtung zu bestimmen, müssen wir eine Richtung in der  $xy$ -Ebene finden, die der Boost invariant lässt. (Vgl.:  $B_{(x)}$  lässt die  $\mathbf{e}_y$ -Richtung invariant und  $B_{(y)}$  entsprechend die  $\mathbf{e}_x$ -Richtung) Die Boostrichtung steht dann senkrecht dazu. (2 Punkte)

### Aufgabe 5 : Raum-Zeit-Diagramm 1

Ein Astronaut startet am Neujahrstag des Jahres 2006 von der Erde aus zum Fixstern  $\alpha$  Centauri (4 Lichtjahre entfernt) und fliegt mit der Geschwindigkeit  $v = 0.8c$ .

Wenn er den Stern erreicht hat, kehrt er sofort um und fliegt mit der gleichen Geschwindigkeit zur Erde zurück. Mit seinem auf der Erde verbliebenen Bruder hat er vor dem Start ausgemacht, dass sie sich gegenseitig über Radartelefon an jedem Neujahrstag Grüße schicken. Wieviele Botschaften schickt jeder dem anderen und wann treffen diese ein? (2 Punkte)

Zeichnen Sie ein Raum-Zeit-Diagramm mit den Weltlinien des Astronauten und der abgesandten Radarsignale. (1 Punkt)

### Aufgabe 6 : Raum-Zeit-Diagramm 2 (schriftlich)

Der Astronaut aus Aufgabe 4 hat es - entgegen den obigen Annahmen - nicht geschafft, das Raumschiff bei  $\alpha$  Centauri umzudrehen, sondern fliegt weiter mit einer Geschwindigkeit von  $0.8c$  von der Erde weg. Er hat natürlich „sofort“ seinem Bruder auf der Erde per Radartelefon mitgeteilt, dass das Umkehrmanöver gescheitert ist. Daraufhin fliegt sein Bruder „sofort“ nach – mit einer Geschwindigkeit von  $0.9c$ .

- a) Wo und wann treffen sie sich? (2 Punkte)
- b) Um wieviel älter sind der Astronaut und sein Bruder seit dem Beginn der Mission geworden? (2 Punkte)
- c) Zeichnen Sie die Weltlinien der beiden Raumfahrer in einem Bezugssystem,
  - i) das auf der Erde ruht, (1 Punkt)
  - ii) in dem der zuerst losgefahrene Astronaut ruht. (1 Punkt)

### Aufgabe 7 : Star Wars

Zwei Raumschiffe gleicher Länge fliegen mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  in Längsrichtung nahe aneinander vorbei. Beide sind am Ende mit einem Laser ausgerüstet. Die beiden Besatzungen erhalten die Anweisung, im selben Moment, in dem die Spitze des eigenen Raumschiffs das Ende des anderen erreicht hat, einen Laserpuls abzufeuern.

Treffen die Laserpulse, und wenn ja, an welchen Stellen der Raumschiffe? (5 Punkte)

---

*Abgabe der schriftlichen Aufgaben am 6.11.2018 in der Vorlesung.*