Übungen zur Vorlesung ,,Astronomie und Astrophysik 1", WS 2019/20

6. Übungsblatt vom 07.01.2020

Abgabe der schriftlichen Übung: Dienstag, 14.01.2020, 14:45 Uhr, nach der Vorlesung.

Aufgabe 16: Effektiver Brechungsindex im Gravitationsfeld (schriftlich) 10 P.

a) Führen Sie im Schwarzschild-Linienelement

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right)$$

eine Transformation auf isotrope Koordinaten durch, indem Sie eine Radialkoordinate $\bar{r}$ definieren durch

$$r = \left(1 + \frac{r_\mathrm{s}}{4\bar{r}}\right)^2 \bar{r} \; .$$

Zeigen Sie, dass das Linienelement die Gestalt

$$ds^2 = \left(\frac{1 - r_\mathrm{s}/4\bar{r}}{1 + r_\mathrm{s}/4\bar{r}}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_\mathrm{s}}{4\bar{r}}\right)^4 d\vec{\bar{x}}^{\,2}$$

mit

$$\vec{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \bar{r} \sin\theta \cos\varphi \\ \bar{r} \sin\theta \sin\varphi \\ \bar{r} \cos\theta \end{pmatrix}$$

annimmt.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Metrik die lokale Lichtgeschwindigkeit v_Licht und zeigen Sie, dass für den Brechungsindex n in erster Ordnung in r_s/r gilt

$$n = \frac{c}{v_\mathrm{Licht}} = 1 + \frac{r_\mathrm{s}}{r} \; .$$

Aufgabe 17: Relativitätstheorie beim Navigationssystem 6 Punkte

Beim globalen Positionierungssystem (GPS) kommen auf 6 kreisförmigen Satellitenbahnen, die jeweils um 55° gegen den Äquator geneigt sind und deren Bahnebenen relativ zueinander um jeweils 60° verdreht sind, pro Bahn 4 Satelliten zum Einsatz. Die Bahnhöhe ist so gewählt, dass jeder Satellit zweimal pro Sternentag (23 h 56 min) die Erde umrundet.

a) Berechnen Sie die Bahnhöhe und die Geschwindigkeit des GPS-Satelliten.

b) Um welches Zeitintervall geht die Uhr auf dem Satelliten nach der Speziellen Relativitätstheorie *langsamer* als auf der Erde?

c) Um welches Zeitintervall geht die Uhr auf dem Satelliten nach der Allgemeinen Relativitätstheorie in der Höhe des Satelliten *schneller* als auf der Erde?

d) Welche Missweisung in der Ortsbestimmung ergibt sich demnach bereits nach 24 Stunden?

$M_\mathrm{Erde} = 5{,}977 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R_\mathrm{Erde} = 6375\,\mathrm{km}$,
$G = 6{,}6732 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$, $c = 2{,}9979 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Hinten geht's weiter!

Aufgabe 18: Inhomogene Gravitationsfelder **6 Punkte**

Nach dem Äquivalenzprinzip laufen mechanische Vorgänge in einem kleinen, frei fallenden Labor ebenso ab wie in einem Newtonschen Inertialsystem. In dieser Aufgabe sollen Sie im Rahmen der Newtonschen Mechanik untersuchen, welche Auswirkungen die endliche Größe eines im inhomogenen Gravitationsfeld fallenden Labors hat.

Betrachten Sie dazu zwei Körper, die im Abstand $r_1(t)$ und $r_2(t) = r_1(t) + \xi(t)$ radial auf eine Punktmasse M zufallen. Wäre das Äquivalenzprinzip global erfüllt, so wäre $\xi(t)$ konstant.

a) Leiten Sie aus der Newtonschen Bewegungsgleichung ab, dass für kleine ξ näherungsweise gilt

$$\ddot{\xi} = c^2 \frac{r_\mathrm{s}}{r^3}\, \xi \, .$$

b) Zeigen Sie, dass sich der Abstand ξ der beiden Körper während einer kurzen Beobachtungszeit t um

$$\Delta\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)^3 \left(\frac{ct}{r_\mathrm{s}}\right)^2 \xi_0$$

verändert, wenn ξ_0 der ursprüngliche Abstand ist. Wenn $\Delta\xi$ kleiner ist als die erreichbare Messgenauigkeit, kann man das Labor als „klein“ ansehen.

c) Berechnen Sie $\Delta\xi$ für eine Labor der Größe $\xi_0 = 100\,\mathrm{m}$ auf der Erdoberfläche für Beobachtungszeiten t von 1 s und 60 s.