Übungen zur Vorlesung „Astronomie und Astrophysik 1", WS 2019/20

7. Übungsblatt vom 21.01.2020

Abgabe der schriftlichen Übung: Dienstag, 28.01.2020, 15:45 Uhr, nach der Vorlesung.

Aufgabe 19: Dopplerverschiebung von Spektrallinien (schriftlich, 10 Punkte)

Eine Galaxie entferne sich von uns mit der Geschwindigkeit v_r. In ihrem System werde eine Spektrallinie der Wellenlänge λ_0 ausgesandt. Wir messen die Doppler-verschobene Wellenlänge λ. Die relative Wellenlängenverschiebung wird mit z bezeichnet („Rotverschiebung"), $z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$.

a) Berechnen Sie, welcher Zusammenhang nach der Speziellen Relativitätstheorie zwischen λ_0, λ und v_r besteht (longitudinaler Doppler-Effekt).

b) Geben Sie die Rotverschiebung z als Funktion von $\beta_r = v_r/c$ an. Drücken Sie auch v_r/c durch z aus.

d) Was ergibt sich für z im nichtrelativistischen Grenzfall $v_r/c \ll 1$ (linearer Dopplereffekt)?

c) Für welchen Wert von β_r wird die Lyman-α-Linie des H-Atoms auf die Wellenlänge der Balmer-α-Linie verschoben?
($\lambda_{\mathrm{Lyman}-\alpha} = 121,6\,\mathrm{nm}$, $\lambda_{\mathrm{Balmer}-\alpha} = 656,5$ nm).

Aufgabe 20: Konform-Euklidische Koordinaten (10 Punkte)

Definieren Sie $\bar{r} = 2\tan\vartheta/2$ und $x = \bar{r}\cos\varphi$, $y = \bar{r}\sin\varphi$. Zeigen Sie, dass auf der Kugeloberfläche $\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2 = a^2(t)$ für das differentielle Linienelement gilt

$$(\mathrm{d}l)^2 = a^2(t) \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}\bar{r}^2\right)^2} \left((\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2\right). \tag{1}$$

(Kugelkoordinaten: $\hat{x}_1 = a\sin\vartheta\cos\varphi$, $\hat{x}_2 = a\sin\vartheta\sin\varphi$, $\hat{x}_3 = a\cos\vartheta$).

Aufgabe 21: Kleinsches Modell der Pseudosphäre (10 Punkte)

Die pseudosphärischen Koordinaten $\hat{x}_1 = a\sinh\chi\cos\varphi$, $\hat{x}_2 = a\sinh\chi\sin\varphi$, $\hat{x}_3 = a\cosh\chi$ definieren ein 2-schaliges Hyperboloid (Pseudosphäre) $-\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2 = a^2$.

a) Zeigen Sie, dass sich für das Linienelement auf der Pseudosphäre ergibt: $(\mathrm{d}l)^2 = a^2((\mathrm{d}\chi)^2 + \sinh^2\chi(\mathrm{d}\varphi)^2)$.

b) Definieren Sie $\bar{r} = 2\tanh\chi/2$ und $x = \bar{r}\cos\varphi$, $y = \bar{r}\sin\varphi$. Zeigen Sie, dass $\bar{r}^2 < 4$ ist, und das differentielle Linienelement die Form des aus Aufgabe 21 bekannten konform-euklidischen Linienelements (1) annimmt, mit dem kleinen Unterschied, dass im Vorfaktor $(1 + \frac{1}{4}\bar{r}^2)$ durch $(1 - \frac{1}{4}\bar{r}^2)$ zu ersetzen ist (Poincaré-Modell der Lobachevsky-Metrik).

c) Wir führen weitere Koordinaten u und v anstelle von x und y ein gemäß $(x + iy)/2 = (1 + iw)/(1 - iw)$, wobei $w = (u + iv)$. Zeigen Sie, dass das differentielle Linienelement dann die Form

$$(\mathrm{d}l)^2 = a^2\,((\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2)/v^2$$

annimmt (Kleinsches Modell der Lobachevsky-Metrik, Metrik der Rotationsfläche der Traktrix).