Übungen zur Vorlesung „Astronomie und Astrophysik 1", WS 20120/21
4. Übungsblatt vom 12.01.2021

Abgabe der schriftlichen Aufgabe: Dienstag, 19.01.2021, bis spätestens 17:00 elektronisch an patric.rommel@itp1.uni-stuttgart.de

Aufgabe 12: Abbremsung eines Neutronensterns (schriftlich) 10 Punkte

Ein homogen magnetisierter rotierender Neutronenstern (senkrechter Rotator) emittiert magnetische Dipolstrahlung und wird dadurch allmählich abgebremst. Die abgestrahlte Leistung berechnet sich zu $\bar{S} = \frac{\varepsilon_0}{6\pi c}\,\omega^4\, m_0^2$ (m_0: magnetisches Moment). Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen der Polfeldstärke B_0 ($= 2m_0/R^3$), der Rotationsperiode P und ihrer Ableitung $\dot{P}$, indem Sie die zeitliche Änderung der Rotationsenergie $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$ mit der Abstrahlung $\bar{S}$ gleichsetzen.

Welches Polmagnetfeld ergibt sich für den Crab-Pulsar, wenn Sie für I das Trägheitsmoment einer homogenen Vollkugel mit 1,5 Sonnenmassen und einem Radius von 10 km verwenden? Daten vom 15.11.2020 [1]: $P = 0{,}033781965\,\text{s}$, $\dot{P} = 4{,}1987485 \times 10^{-13}\,\text{s/s}$.

Aufgabe 13: Millisekundenpulsare (freiwillig schriftlich 4 Punkte)

Für einen extrem kurzperiodischen Pulsar werden eine Periode von $P = 1{,}557806$ ms und eine Periodenänderung von $\dot{P} = 1{,}0508 \cdot 10^{-19}\,\text{s/s}$ gemessen.

a) Suchen Sie auf dem Klavier denjenigen Ton, dessen Frequenz der des Pulsars am nächsten liegt. Der Kammerton a' hat 440 Hz.

b) Nach welcher Zeit „singt" bei gleichbleibendem $\dot{P}$ der Pulsar um einen halben Ton tiefer?

(Anmerkung: 1 Oktave $\hat{=}$ 12 Halbtonschritte $\hat{=}$ Frequenzverdopplung)

Aufgabe 14: Inhomogene Gravitationsfelder (freiwillig schriftlich 6 Punkte)

Nach dem Äquivalenzprinzip laufen mechanische Vorgänge in einem kleinen, frei fallenden Labor ebenso ab wie in einem Newtonschen Inertialsystem. In dieser Aufgabe sollen Sie im Rahmen der Newtonschen Mechanik untersuchen, welche Auswirkungen die endliche Größe eines im inhomogenen Gravitationsfeld fallenden Labors hat.

Betrachten Sie dazu zwei Körper, die im Abstand $r_1(t)$ und $r_2(t) = r_1(t) + \xi(t)$ radial auf eine Punktmasse M zufallen. Wäre das Äquivalenzprinzip global erfüllt, so wäre $\xi(t)$ konstant.

a) Leiten Sie aus der Newtonschen Bewegungsgleichung ab, dass für kleine ξ näherungsweise gilt

$$\ddot{\xi} = c^2 \frac{r_{\mathbf{s}}}{r^3}\, \xi \;.$$

b) Zeigen Sie, dass sich der Abstand ξ der beiden Körper während einer kurzen Beobachtungszeit t um

$$\Delta\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{r_{\mathbf{s}}}{r}\right)^3 \left(\frac{ct}{r_{\mathbf{s}}}\right)^2 \xi_0$$

verändert, wenn ξ_0 der ursprüngliche Abstand ist. Wenn $\Delta\xi$ kleiner ist als die erreichbare Messgenauigkeit, kann man das Labor als „klein" ansehen.

c) Berechnen Sie $\Delta\xi$ für eine Labor der Größe $\xi_0 = 100\,\text{m}$ auf der Erdoberfläche für Beobachtungszeiten t von 1 s und 60 s.

[1] http://www.jb.man.ac.uk/pulsar/crab.html