Übungen zur Vorlesung ,,Astronomie und Astrophysik 1", WS 2020/21

5. Übungsblatt vom 26.01.2021

Abgabe der schriftlichen Aufgabe: Dienstag, 02.02.2021, bis spätestens 17:00 elektronisch an patric.rommel@itp1.uni-stuttgart.de

Aufgabe 15: Effektiver Brechungsindex im Gravitationsfeld (schriftlich) 10 P.

a) Führen Sie im Schwarzschild-Linienelement

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

eine Transformation auf isotrope Koordinaten durch, indem Sie eine Radialkoordinate $\bar{r}$ definieren durch

$$r = \left(1 + \frac{r_\mathrm{s}}{4\bar{r}}\right)^2 \bar{r} \ .$$

Zeigen Sie, dass das Linienelement die Gestalt

$$ds^2 = \left(\frac{1 - r_\mathrm{s}/4\bar{r}}{1 + r_\mathrm{s}/4\bar{r}}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_\mathrm{s}}{4\bar{r}}\right)^4 d\vec{\bar{x}}^{\,2}$$

mit

$$\vec{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \bar{r}\sin\theta\cos\varphi \\ \bar{r}\sin\theta\sin\varphi \\ \bar{r}\cos\theta \end{pmatrix}$$

annimmt.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Metrik die lokale Lichtgeschwindigkeit v_Licht und zeigen Sie, dass für den Brechungsindex n in erster Ordnung in r_s/r gilt

$$n = \frac{c}{v_\mathrm{Licht}} = 1 + \frac{r_\mathrm{s}}{r} \ .$$

Aufgabe 16: Relativitätstheorie beim Navigationssystem
(freiwillig schriftlich 6 Punkte)

Beim globalen Positionierungssystem (GPS) kommen auf 6 kreisförmigen Satellitenbahnen, die jeweils um 55° gegen den Äquator geneigt sind und deren Bahnebenen relativ zueinander um jeweils 60° verdreht sind, pro Bahn 4 Satelliten zum Einsatz. Die Bahnhöhe ist so gewählt, dass jeder Satellit zweimal pro Sternentag (23 h 56 min) die Erde umrundet.

a) Berechnen Sie die Bahnhöhe und die Geschwindigkeit des GPS-Satelliten.

b) Um welches Zeitintervall geht die Uhr auf dem Satelliten nach der Speziellen Relativitätstheorie *langsamer* als auf der Erde?

c) Um welches Zeitintervall geht die Uhr auf dem Satelliten nach der Allgemeinen Relativitätstheorie in der Höhe des Satelliten *schneller* als auf der Erde?

d) Welche Missweisung in der Ortsbestimmung ergibt sich demnach bereits nach 24 Stunden?

$M_\mathrm{Erde} = 5,977 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R_\mathrm{Erde} = 6375\,\mathrm{km}$,
$G = 6,6732 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$, $c = 2,9979 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Hinten geht's weiter!

Aufgabe 17: Dopplerverschiebung von Spektrallinien

(freiwillig schriftlich 10 Punkte)

Eine Galaxie entferne sich von uns mit der Geschwindigkeit v_r. In ihrem System werde eine Spektrallinie der Wellenlänge λ_0 ausgesandt. Wir messen die Doppler-verschobene Wellenlänge λ. Die relative Wellenlängenverschiebung wird mit z bezeichnet („Rotverschiebung"), $z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$.

a) Berechnen Sie, welcher Zusammenhang nach der Speziellen Relativitätstheorie zwischen λ_0, λ und v_r besteht (longitudinaler Doppler-Effekt).

b) Geben Sie die Rotverschiebung z als Funktion von $\beta_r = v_r/c$ an. Drücken Sie auch v_r/c durch z aus.

d) Was ergibt sich für z im nichtrelativistischen Grenzfall $v_r/c \ll 1$ (linearer Dopplereffekt)?

c) Für welchen Wert von β_r wird die Lyman-α-Linie des H-Atoms auf die Wellenlänge der Balmer-α-Linie verschoben?
($\lambda_{\text{Lyman}-\alpha} = 121,6\,\text{nm}$, $\lambda_{\text{Balmer}-\alpha} = 656,5$ nm).