

Übungen zur Vorlesung „Astronomie und Astrophysik 1“, WS 2018/19

6. Übungsblatt vom 12.01.2022

Abgabe der schriftlichen Aufgabe: Mittwoch, 19.01.2022, nach der Vorlesung, oder bis spätestens 17:00 elektronisch an patric.rommel@itp1.uni-stuttgart.de

Aufgabe 17: Dopplerverschiebung von Spektrallinien (schriftlich, 10 Punkte)

Eine Galaxie entferne sich von uns mit der Geschwindigkeit v_r . In ihrem System werde eine Spektrallinie der Wellenlänge λ_0 ausgesandt. Wir messen die Dopplerverschobene Wellenlänge λ . Die relative Wellenlängenverschiebung wird mit z bezeichnet („Rotverschiebung“), $z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$.

- a) Berechnen Sie, welcher Zusammenhang nach der Speziellen Relativitätstheorie zwischen λ_0 , λ und v_r besteht (longitudinaler Doppler-Effekt).
- b) Geben Sie die Rotverschiebung z als Funktion von $\beta_r = v_r/c$ an. Drücken Sie auch v_r/c durch z aus.
- d) Was ergibt sich für z im nichtrelativistischen Grenzfall $v_r/c \ll 1$ (linearer Dopplereffekt)?
- c) Für welchen Wert von β_r wird die Lyman- α -Linie des H-Atoms auf die Wellenlänge der Balmer- α -Linie verschoben?
($\lambda_{\text{Lyman-}\alpha} = 121,6 \text{ nm}$, $\lambda_{\text{Balmer-}\alpha} = 656,5 \text{ nm}$).

Aufgabe 18: Konform-Euklidische Koordinaten (freiwillig schriftlich 10 Punkte)

Definieren Sie $\bar{r} = 2 \tan \vartheta/2$ und $x = \bar{r} \cos \varphi$, $y = \bar{r} \sin \varphi$. Zeigen Sie, dass auf der Kugeloberfläche $\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2 = a^2(t)$ für das differentielle Linienelement gilt

$$(dl)^2 = a^2(t) \cdot \frac{1}{(1 + \frac{1}{4}\bar{r}^2)^2} ((dx)^2 + (dy)^2). \quad (1)$$

(Kugelkoordinaten: $\hat{x}_1 = a \sin \vartheta \cos \varphi$, $\hat{x}_2 = a \sin \vartheta \sin \varphi$, $\hat{x}_3 = a \cos \vartheta$).

Aufgabe 19: Kleinsches Modell der Pseudosphäre (freiwillig schriftlich 10 Punkte)

Die pseudosphärischen Koordinaten $\hat{x}_1 = a \sinh \chi \cos \varphi$, $\hat{x}_2 = a \sinh \chi \sin \varphi$, $\hat{x}_3 = a \cosh \chi$ definieren ein 2-schaliges Hyperboloid (Pseudosphäre) $-\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2 = a^2$.

- a) Zeigen Sie, dass sich für das Linienelement auf der Pseudosphäre ergibt: $(dl)^2 = a^2((d\chi)^2 + \sinh^2 \chi (d\varphi)^2)$.
- b) Definieren Sie $\bar{r} = 2 \tanh \chi/2$ und $x = \bar{r} \cos \varphi$, $y = \bar{r} \sin \varphi$. Zeigen Sie, dass $\bar{r}^2 < 4$ ist, und das differentielle Linienelement die Form des aus Aufgabe 18 bekannten konform-euklidischen Linienelements (1) annimmt, mit dem kleinen Unterschied, dass im Vorfaktor $(1 + \frac{1}{4}\bar{r}^2)$ durch $(1 - \frac{1}{4}\bar{r}^2)$ zu ersetzen ist (Poincaré-Modell der Lobachevsky-Metrik).
- c) Wir führen weitere Koordinaten u und v anstelle von x und y ein gemäß $(x + iy)/2 = (1 + iw)/(1 - iw)$, wobei $w = (u + iv)$. Zeigen Sie, dass das differentielle Linienelement dann die Form

$$(dl)^2 = a^2 ((du)^2 + (dv)^2)/v^2$$

annimmt (Kleinsches Modell der Lobachevsky-Metrik, Metrik der Rotationsfläche der Traktrix).