

**Übungen zur Vorlesung „Astronomie und Astrophysik 1“, WS 2021/2022**

## 7. Übungsblatt vom 26.01.2022

Abgabe der schriftlichen Aufgabe: Mittwoch, 02.02.2022, nach der Vorlesung, oder bis spätestens 17:00 elektronisch an patric.rommel@itp1.uni-stuttgart.de

**Aufgabe 20: Energie-Impuls-Tensor einer Flüssigkeit (schriftlich, 10 Punkte)**

Der Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit der Ruhedichte  $\sigma$  und des Druckes  $p$  ist gegeben durch

$$T^{\mu\nu} = \left( \sigma + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} .$$

Dabei ist  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$  die Vierergeschwindigkeit der Flüssigkeit. Im Folgenden ist unter  $g_{\mu\nu}$  der metrische Tensor der Robertson-Walker-Metrik und unter  $g^{\mu\nu}$  dessen Inverses zu verstehen.

a) Bestimmen Sie die Komponenten des Tensors im Ruhesystem der Flüssigkeit. Machen Sie sich die physikalische Bedeutung der einzelnen Komponenten klar.

b) Bestimmen Sie die Spur  $T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$  und die Komponenten des modifizierten Tensors  $T_{\mu\nu}^* = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T$  in dem in der Vorlesung verwendeten kosmologischen Koordinatensystem  $(t, r, \vartheta, \varphi)$ .

c) Folgern Sie aus den Einsteinschen Feldgleichungen die in der Vorlesung angegebenen Gleichungen

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2qc^2 &= 4\pi G \left( \sigma - \frac{p}{c^2} \right) a^2 \\ (\beta) \quad 3\ddot{a} &= -4\pi G \left( \sigma + 3\frac{p}{c^2} \right) a \end{aligned}$$

mit der Newtonschen Gravitationskonstanten  $G$ .

**Aufgabe 21: De-Sitter-Metrik (freiwillig schriftlich 10 Punkte)**

Die De-Sitter-Metrik wird beschrieben durch das Längenelement

$$ds^2 = c^2 dt^2 - e^{2ct/l} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

mit einer Konstanten  $l$ .

a) Zeigen Sie, dass die De-Sitter-Metrik ein Spezialfall der Robertson-Walker-Metrik ist. Wie lauten die Parameter  $q$  und  $a(t)$ ?

b) Bestimmen Sie aus der Einstein-Gleichung und dem Energiesatz die Dichte  $\sigma$  und den Druck  $p$  in einem De-Sitter-Universum.