Übungen zur Vorlesung „Astronomie und Astrophysik 1", WS 2022/23

5. Übungsblatt vom 10.01.2023

Abgabe der schriftlichen Aufgabe: Dienstag, 17.01.2023, nach der Vorlesung oder bis spätestens 17:00 elektronisch an wunner@itp1.uni-stuttgart.de

Aufgabe 15: Relativitätstheorie beim Navigationssystem (schriftlich 8 Punkte)

Beim globalen Positionierungssystem (GPS) kommen auf 6 kreisförmigen Satellitenbahnen, die jeweils um 55° gegen den Äquator geneigt sind und deren Bahnebenen relativ zueinander um jeweils 60° verdreht sind, pro Bahn 4 Satelliten zum Einsatz. Die Bahnhöhe ist so gewählt, dass jeder Satellit zweimal pro Sternentag (23 h 56 min) die Erde umrundet.

a) Berechnen Sie die Bahnhöhe und die Geschwindigkeit des GPS-Satelliten.

b) Um welches Zeitintervall geht die Uhr auf dem Satelliten nach der Speziellen Relativitätstheorie *langsamer* als auf der Erde?

c) Um welches Zeitintervall geht die Uhr auf dem Satelliten nach der Allgemeinen Relativitätstheorie in der Höhe des Satelliten *schneller* als auf der Erde?

d) Welche Missweisung in der Ortsbestimmung ergibt sich demnach bereits nach 24 Stunden?

$M_{\mathrm{Erde}} = 5,977 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R_{\mathrm{Erde}} = 6375\,\mathrm{km}$,
$G = 6,6732 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$, $c = 2,9979 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Aufgabe 16: Chirp-Masse (freiwillig schriftlich, 7 Punkte)

Im Kepler-Problem zweier Massen m_1, m_2, deren reduzierte Masse sich im Relativsystem auf einer Kepler-Ellipse mit großer Halbachse a bewegt, ist die Bindungsenergie des Systems bekanntlich gegeben durch $E = -\frac{1}{2}\frac{Gm_1m_2}{a}$. Nach dem 3. Keplerschen Gesetz gilt $\omega = \left(\frac{GM}{a^3}\right)^{1/2}$, wobei $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse des Systems ist.

a) Lösen Sie das 3. Keplersche Gesetz nach a auf und setzen Sie das Ergebnis in die Bindungsenergie ein.

b) Zeigen Sie, dass diese sich schreiben lässt als $E = -\frac{1}{2}\left(G^2\mathcal{M}^5\right)^{1/3}\omega^{2/3}$, mit der Chirp-Masse $\mathcal{M} = \left(\frac{m_1^3 m_2^3}{M}\right)^{1/5}$ (*to chirp: zirpen, zwitschern*).

c) Für den Nachweis von Gravitationswellen ist die Chirp-Masse von praktischer Bedeutung, weil aus der Frequenz $f(t)$ und der Frequenzänderung $\dot{f}(t)$ der Gravitationswelle kurz vor dem Verschmelzen zweier Schwarzer Löcher direkt auf die Chirp-Masse des Systems geschlossen werden kann. (Es ist nämlich $\mathcal{M} = \frac{c^3}{G}\left(\frac{5}{96}\pi^{-8/3}f^{-11/3}\dot{f}\right)$)

Berechnen Sie die Chirp-Masse für das Verschmelzen zweier Schwarzer Löcher mit jeweils k Sonnenmassen.