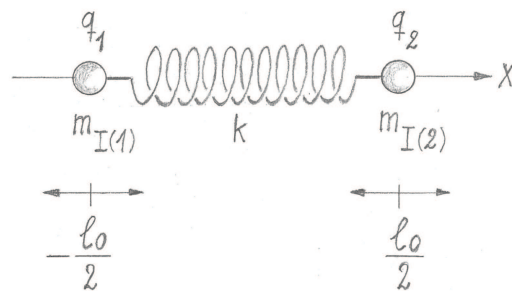


Übungen zur Vorlesung „Astronomie und Astrophysik 1“, WS 2022/23

6. Übungsblatt vom 24.01.2023

Abgabe der schriftlichen Aufgabe: Dienstag, 31.01.2023, nach der Vorlesung oder bis spätestens 17:00 elektronisch an wunner@itp1.uni-stuttgart.de

Aufgabe 17: Gedankenexperiment zum gravitativen Dipolmoment (12 Punkte, schriftlich)



Zwei träge Massen $m_1 = m_{I(1)}$, $m_2 = m_{I(2)}$ mit elektrischer Ladung q_1 , q_2 seien, wie in der Skizze gezeigt, über eine Feder miteinander gekoppelt. Die Bewegung der Massen soll nur durch die elastische Kraft der Feder erfolgen, die Coulomb-Wechselwirkung der Ladungen soll vernachlässigbar sein. Die Federkonstante ist k , ℓ_0 ist die Länge der entspannten Feder.

- Stellen Sie die Lagrange-Funktion der Anordnung auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen für die beiden Massen her.
- Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen unter den Anfangsbedingungen $x_1(0) = -\ell_0/2$, $x_2(0) = +\ell_0/2$, $\dot{x}_1(0) = v_1$, $\dot{x}_2(0) = v_2$ gelöst werden durch

$$x_1 = -\frac{\ell_0}{2} - \frac{\mu}{m_1} \tilde{A}_1 \cdot \sin \omega t, \quad x_2 = +\frac{\ell_0}{2} + \frac{\mu}{m_2} \tilde{A}_2 \cdot \sin \omega t$$

(μ : die reduzierte träge Masse von m_1 und m_2). Die Feder soll während der Bewegung ruhen, welche Bedingung ist also an den Gesamtimpuls, auch zur Zeit $t = 0$, zu stellen? In welchem Verhältnis stehen daher die Anfangsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 zueinander? Bestimmen Sie die Amplitudenfaktoren \tilde{A}_1 und \tilde{A}_2 und die Eigenfrequenz ω .

- Geben Sie das elektrische Dipolmoment $d = q_1 x_1 + q_2 x_2$ an. Wann verschwindet der zeitabhängige Anteil? Was ergibt sich für $q_2 = q$, $q_1 = -q$?
- Im nächsten Schritt ersetzen wir die elektrischen Ladungen durch die Gravitationsladungen (schweren Massen) $m_{G(1)}$, $m_{G(2)}$ der Teilchen. Berechnen Sie nun das gravitative Dipolmoment $d = m_{G(1)} x_1 + m_{G(2)} x_2$. Warum ergibt sich kein zeitabhängiges Massen-Dipolmoment und damit auch keine gravitative Dipolstrahlung?

Bearbeitet nach K.-H. Lotze, Uni Jena

Hinten geht's weiter!

Aufgabe 18: Strahlungsleistung von Gravitationswellen (freiwillig schriftlich, 10 Punkte)

Für die abgestrahlte Leistung von Massen, die eine Gravitationswelle aussenden, ergibt sich in der ART

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{T}_{jk} \ddot{T}^{jk} \rangle. \quad (1)$$

Dabei ist T_{jk} der sogenannte reduzierte Quadrupoltensor. Für 2 Massen m_1, m_2 , die mit einem Relativabstand a um ihren gemeinsamen Schwerpunkt kreisen, liefert die Rechnung für diesen Tensor

$$\langle \ddot{T}_{jk} \ddot{T}^{jk} \rangle = 32a^4 \omega^6 m_{\text{red}}^2 \quad (2)$$

mit der reduzierten Masse

$$m_{\text{red}} = \frac{m_1 m_2}{\underbrace{m_1 + m_2}_M} \quad (3)$$

und der Winkelgeschwindigkeit ω .

- Begründen Sie das Ergebnis (2) anschaulich.
- Setzen Sie das Ergebnis (2) in (1) ein. Was ergibt sich für die insgesamt abgestrahlte Leistung?
- Eliminieren Sie in dieser Gleichung die Massen m_1, m_2 über deren Schwarzschild-Radien $R_{S1} = 2Gm_1/c^2, R_{S2} = 2Gm_2/c^2$, und zeigen Sie, dass sich für die abgestrahlte Leistung ergibt

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{1}{10} \frac{c^5}{G} \left(\frac{R_{S1}}{a} \right)^2 \left(\frac{R_{S2}}{a} \right)^2 \frac{R_{S1} + R_{S2}}{a} \quad (4)$$

mit der Planck-Leistung

$$\frac{c^5}{G} = 3,628 \times 10^{52} \text{ W}. \quad (5)$$

- Welchen Zahlenwert erhält man für das Erde-Mond-System mit $R_{S,Erde} = 8,9 \text{ mm}$, $R_{S,Mond} = 0,11 \text{ mm}$ und einem mittleren Abstand von 384.000 km ?
- Welchen Zahlenwert erhält man für zwei Neutronensterne mit jeweils 1,4-facher Sonnenmasse, die im Abstand von 700.000 km umeinander kreisen?