Übungen zur Vorlesung „Astronomie und Astrophysik 2", SS 2019

6. Übungsblatt vom 25.06.2019

Abgabe der schriftlichen Übung: Dienstag, 02.07.2019, 15:30, nach der Vorlesung.

Aufgabe 13: Sachs-Wolfe-Effekt **schriftlich (10 Punkte)**

a) In einem Gravitationspotential Φ gehen Uhren langsamer: Die Eigenzeit τ ist mit der Koordinatenzeit t verknüpft durch

$$d\tau = \sqrt{1 + 2\Phi/c^2}\, dt \approx (1 + \Phi/c^2)\, dt\ . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass für ein Photon, das im Potential Φ mit der (Eigen-)Frequenz ν_0 erzeugt und im Potential $\Phi = 0$ mit der Frequenz ν beobachtet wird, gilt

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{\Phi}{c^2}\ . \tag{2}$$

Folgern Sie, dass ein fluktuierendes Potential bei der letzten Streuung der Hintergrundstrahlung zu einer Fluktuation der Temperatur

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\Phi}{c^2} \tag{3}$$

um die mittlere Temperatur T_0 führt.

b) Zu dem in a) berechneten Effekt, der eine Gravitationsrotverschiebung darstellt, kommt ein weiterer Effekt hinzu, der aus der Zeitdilatation (1) in Potentialtöpfen resultiert:

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \left.\frac{\Delta T}{T_0}\right|_{\text{Zeitdilatation}} + \frac{\Phi}{c^2}\ . \tag{4}$$

Überlegen Sie, wie sich die in einem Potentialtopf etwas langsamer vergehende Zeit auf die heute empfangenen Photonen auswirkt. (Hinweis: Die Entkopplungstemperatur ist mit oder ohne Potential dieselbe.)

Zeigen Sie, dass die durch diesen Effekt verursachte Temperaturfluktuation durch $\Delta T/T_0|_{\text{Zeitdilatation}} = -\frac{2}{3}\Phi/c^2$ gegeben ist, wenn die Entkopplung in der materiedominierten Phase statfindet.

Hinweis: Begründen Sie: In der materiedominierten Phase gilt $t^{2/3}T =$const.

Aufgabe 14: Strahlungsleistung von Gravitationswellen (Abschätzung) **(10 Punkte)**

Eine Masse m umkreise einen Zentralkörper der Masse M auf einer Kreisbahn mit Radius r. Aus den Grundgleichungen der ART ergibt sich als Strahlungsleistung der dabei emittierten Gravitationswellen (bis auf Zahlenfaktoren der Größenordnung 1)

$$P = \frac{G}{c^5} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \left(\frac{d^3}{dt^3} Q_{\alpha\beta}\right)^2, \tag{5}$$

wobei $Q_{\alpha\beta}$ das zeitabhängige Massenquadrupolmoment des Gesamtsystems bedeutet. Wegen der periodischen Zeitabhängigkeit der Bewegung $\propto \sin(\omega t)$ liefert jede Zeitableitung einen Faktor ω, und wenn man jedes Quadrupolmoment mit mr^2 abschätzt ergibt sich $P \approx \frac{G}{c^5}(\omega^3 mr^2)^2$.

Hinweis: Auf der Rückseite geht's weiter.

a) Welche Dimension hat der Term $\omega^3 m r^2$, welcher physikalischen Größe entspricht dies?

b) Geben Sie den Ausdruck für die Planck-Leistung $P_{\mathrm{Pl}} = m_{\mathrm{Pl}} c^2 / t_{\mathrm{Pl}}$ an und berechnen Sie deren Zahlenwert. Vergleichen Sie diesen mit der Leuchtkraft der Sonne.

c) Zeigen Sie, dass sich für die Kreisbewegung als Abschätzung

$$P \approx P_{\mathrm{Pl}} \left(\frac{1}{2} \frac{R_M}{r} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \frac{R_m}{r} \right)^2 \tag{6}$$

ergibt, wobei R_M und R_m die Schwarzschildradien von M bzw. m bedeuten.

d) Welche in Form von Gravitationswellen abgestrahlte Leistung ergibt sich somit für das Erde-Mond-System? ($R_M = 8,9$ mm, $R_m = 0,11$ mm, mittlere Mondentfernung $r = 380000$ km)