

## Übungen zur Vorlesung „Astronomie und Astrophysik 1“, WS 2021/22

### 6. Übungsblatt vom 12.01.2022

Abgabe der schriftlichen Aufgabe: Mittwoch, 19.01.2022, nach der Vorlesung, oder bis spätestens 17:00 elektronisch an patric.rommel@itp1.uni-stuttgart.de

#### **Aufgabe 17: Dopplerverschiebung von Spektrallinien (schriftlich, 10 Punkte)**

Eine Galaxie entferne sich von uns mit der Geschwindigkeit  $v_r$ . In ihrem System werde eine Spektrallinie der Wellenlänge  $\lambda_0$  ausgesandt. Wir messen die Dopplerverschobene Wellenlänge  $\lambda$ . Die relative Wellenlängenverschiebung wird mit  $z$  bezeichnet („Rotverschiebung“),  $z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$ .

- a) Berechnen Sie, welcher Zusammenhang nach der Speziellen Relativitätstheorie zwischen  $\lambda_0$ ,  $\lambda$  und  $v_r$  besteht (longitudinaler Doppler-Effekt).
- b) Geben Sie die Rotverschiebung  $z$  als Funktion von  $\beta_r = v_r/c$  an. Drücken Sie auch  $v_r/c$  durch  $z$  aus.
- c) Was ergibt sich für  $z$  im nichtrelativistischen Grenzfall  $v_r/c \ll 1$  (linearer Dopplereffekt)?
- d) Für welchen Wert von  $\beta_r$  wird die Lyman- $\alpha$ -Linie des H-Atoms auf die Wellenlänge der Balmer- $\alpha$ -Linie verschoben?

( $\lambda_{\text{Lyman-}\alpha} = 121,6 \text{ nm}$ ,  $\lambda_{\text{Balmer-}\alpha} = 656,5 \text{ nm}$ ).

#### **Aufgabe 18: Konform-Euklidische Koordinaten (freiwillig schriftlich 10 Punkte)**

Definieren Sie  $\bar{r} = 2 \tan \vartheta/2$  und  $x = \bar{r} \cos \varphi$ ,  $y = \bar{r} \sin \varphi$ . Zeigen Sie, dass auf der Kugeloberfläche  $\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2 = a^2(t)$  für das differentielle Linienelement gilt

$$(dl)^2 = a^2(t) \cdot \frac{1}{(1 + \frac{1}{4}\bar{r}^2)^2} ((dx)^2 + (dy)^2). \quad (1)$$

(Kugelkoordinaten:  $\hat{x}_1 = a \sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $\hat{x}_2 = a \sin \vartheta \sin \varphi$ ,  $\hat{x}_3 = a \cos \vartheta$ ).

#### **Aufgabe 19: Kleinsches Modell der Pseudosphäre (freiwillig schriftlich 10 Punkte)**

Die pseudosphärischen Koordinaten  $\hat{x}_1 = a \sinh \chi \cos \varphi$ ,  $\hat{x}_2 = a \sinh \chi \sin \varphi$ ,  $\hat{x}_3 = a \cosh \chi$  definieren ein 2-schaliges Hyperboloid (Pseudosphäre)  $-\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2 = a^2$ .

- a) Zeigen Sie, dass sich für das Linienelement  $(d\hat{x}_1)^2 + (d\hat{x}_2)^2 - (d\hat{x}_3)^2$  auf der Pseudosphäre ergibt:  $(dl)^2 = a^2((d\chi)^2 + \sinh^2 \chi (d\varphi)^2)$ .
- b) Definieren Sie  $\bar{r} = 2 \tanh \chi/2$  und  $x = \bar{r} \cos \varphi$ ,  $y = \bar{r} \sin \varphi$ . Zeigen Sie, dass  $\bar{r}^2 < 4$  ist, und das differentielle Linienelement die Form des aus Aufgabe 18 bekannten konform-euklidischen Linienelements (1) annimmt, mit dem kleinen Unterschied, dass im Vorfaktor  $(1 + \frac{1}{4}\bar{r}^2)$  durch  $(1 - \frac{1}{4}\bar{r}^2)$  zu ersetzen ist (Poincaré-Modell der Lobachevsky-Metrik).
- c) Wir führen weitere Koordinaten  $u$  und  $v$  anstelle von  $x$  und  $y$  ein gemäß  $(x + iy)/2 = (1 + iw)/(1 - iw)$ , wobei  $w = (u + iv)$ . Zeigen Sie, dass das differentielle Linienelement dann die Form

$$(dl)^2 = a^2 ((du)^2 + (dv)^2)/v^2$$

annimmt (Kleinsches Modell der Lobachevsky-Metrik, Metrik der Rotationsfläche der Traktrix).