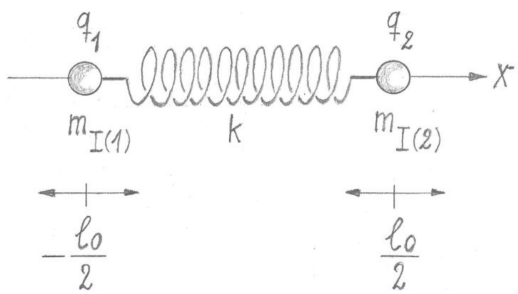
Übungen zur Vorlesung „Astronomie und Astrophysik 2", SS 2022

6. Übungsblatt vom 05.07.2022

Abgabe der schriftlichen Übung am 12.07.2022 nach der Vorlesung oder bis spätestens 17:00 elektronisch an
patric.rommel@itp1.uni-stuttgart.de (Gruppe 2) bzw. clara.roth@arcor.de (Gruppe 3)

Aufgabe 9: Gedankenexperiment zum gravitativen Dipolmoment (12 Punkte, Votieraufgabe)



Zwei träge Massen $m_1 = m_{I(1)}$, $m_2 = m_{I(2)}$ mit elektrischer Ladung q_1, q_2 seien, wie in der Skizze gezeigt, über eine Feder miteinander gekoppelt. Die Bewegung der Massen soll nur durch die elastische Kraft der Feder erfolgen, die Coulomb-Wechselwirkung der Ladungen soll vernachlässigbar sein. Die Federkonstane ist k, ℓ_0 ist die Länge der entspannten Feder.

a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion der Anordnung auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen für die beiden Massen her.

b) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen unter den Anfangsbedingungen $x_1(0) = -\ell_0/2$, $x_2(0) = +\ell_0/2$, $\dot{x}_1(0) = v_1$, $\dot{x}_2(0) = v_2$ gelöst werden durch

$$x_1 = -\frac{\ell_0}{2} - \frac{\mu}{m_1}\tilde{A}_1 \cdot \sin \omega t, \quad x_2 = +\frac{\ell_0}{2} + \frac{\mu}{m_2}\tilde{A}_2 \cdot \sin \omega t$$

(μ: die reduzierte träge Masse von m_1 und m_2). Die Feder soll während der Bewegung ruhen, welche Bedingung ist also an den Gesamtimpuls, auch zur Zeit $t = 0$, zu stellen? In welchem Verhältnis stehen daher die Anfangsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 zueinander? Bestimmen Sie die Amplitudenfaktoren $\tilde{A}_1$ und $\tilde{A}_2$ und die Eigenfrequenz ω.

c) Geben Sie das elektrische Dipolmoment $d = q_1x_1+q_2x_2$ an. Wann verschwindet der zeitabhängige Anteil? Was ergibt sich für $q_2 = q$, $q_1 = -q$?

d) Im nächsten Schritt ersetzen wir die elektrischen Ladungen durch die Gravitationsladungen (schweren Massen) $m_{G(1)}$, $m_{G(2)}$ der Teilchen. Berechnen Sie nun das gravitative Dipolmoment $d = m_{G(1)}x_1 + m_{G(2)}x_2$.
Warum ergibt sich kein zeitabhängiges Massen-Dipolmoment und damit auch keine gravitative Dipolstrahlung?

Bearbeitet nach K.-H. Lotze, Uni Jena

Hinten geht's weiter!

Aufgabe 10: Strahlungsleistung von Gravitationswellen **(schriftlich,10 Punkte)**

Eine Masse m umkreise einen Zentralkörper der Masse M auf einer Kreisbahn mit Radius r ($m \ll M$). Aus den Grundgleichungen der ART ergibt sich als Strahlungsleistung der dabei emittierten Gravitationswellen

$$P = 32\frac{G}{c^5} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \left(\frac{d^3}{dt^3} Q_{\alpha\beta}\right)^2 ,$$

wobei $Q_{\alpha\beta}$ das zeitabhängige Massenquadrupolmoment des Gesamtsystems bedeutet. Wegen der periodischen Zeitabhängigkeit der Bewegung $\propto \sin(\omega t)$ liefert jede Zeitableitung einen Faktor ω, und wenn man jedes Quadrupolmoment mit mr^2 abschätzt ergibt sich $P \approx 32\frac{G}{c^5}(\omega^3 mr^2)^2$.

a) Welche Dimension hat der Term $\omega^3 mr^2$, welcher physikalischen Größe entspricht dies?

b) Zeigen Sie, dass sich für die Kreisbewegung als Abschätzung

$$P \approx 32 P_{\mathrm{Pl}} \left(\frac{1}{2}\frac{R_M}{r}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\frac{R_m}{r}\right)^2$$

ergibt, wobei R_M und R_m die Schwarzschildradien von M bzw. m bedeuten, und $P_{\mathrm{Pl}} = c^5/G \approx 3,26 \cdot 10^{52}$ W die Planck-Leistung ist.

c) Welche in Form von Gravitationswellen abgestrahlte Leistung ergibt sich somit für das Erde-Mond-System? ($R_M = 8,9$ mm, $R_m = 0,11$ mm, mittlere Mondentfernung $r = 384.000$ km).

d) Welcher Wert für die abgestrahlte Leistung ergibt sich für 2 Neutronensterne mit jeweils 1,4-facher Sonnenmasse, die im Abstand von 700.000 km umeinander kreisen? (Hier müsste man allerdings vom Zweikörperproblem ausgehen.)

Aufgabe 11: Chirp-Masse **(6 Punkte, Votieraufgabe)**

Im Kepler-Problem zweier Massen m_1, m_2, deren reduzierte Masse sich im Relativsystem auf einer Kepler-Ellipse mit großer Halbachse a bewegt, ist die Bindungsenergie des Systems bekanntlich gegeben durch $E = -\frac{1}{2}\frac{Gm_1 m_2}{a}$. Nach dem 3. Keplerschen Gesetz gilt $\omega = \left(\frac{GM}{a^3}\right)^{1/2}$, wobei $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse des Systems ist.

Lösen Sie das 3. Keplersche Gesetz nach a auf und setzen Sie das Ergebnis in die Bindungsenergie ein.

Zeigen Sie, dass diese sich schreiben lässt als $E = -\frac{1}{2}\left(G^2\mathcal{M}^5\right)^{1/3}\omega^{2/3}$, mit der Chirp-Masse $\mathcal{M} = \left(\frac{m_1^3 m_2^3}{M}\right)^{1/5}$ (*to chirp: zirpen, zwitschern*).

Für den Nachweis von Gravitationswellen ist die Chirp-Masse von praktischer Bedeutung, weil aus der Frequenz $f(t)$ und der Frequenzänderung $\dot{f}(t)$ der Gravitationswelle kurz vor dem Verschmelzen zweier Schwarzer Löcher direkt auf die Chirp-Masse des Systems geschlossen werden kann. (Es ist nämlich $\mathcal{M} = \frac{c^3}{G}\left(\frac{5}{96}\pi^{-8/3} f^{-11/3}\dot{f}\right)$)

Berechnen Sie die Chirp-Masse für das Verschmelzen zweier Schwarze Löcher mit jeweils k Sonnenmassen.