

Übungen zur Vorlesung „Astronomie und Astrophysik 2“, SS 2023

1. Übungsblatt vom 11.04.2023

Abgabe der schriftlichen Aufgabe: Dienstag, 18.04.2023, nach der Vorlesung, oder bis spätestens 17:00 elektronisch an guenter.wunner@itp1.uni-stuttgart.de

Aufgabe 1: Energie-Impuls-Tensor einer Flüssigkeit (schriftlich, 10 Punkte)

Der Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit der Ruhedichte σ und des Druckes p ist gegeben durch

$$T^{\mu\nu} = \left(\sigma + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} .$$

Dabei ist $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ die Vierergeschwindigkeit der Flüssigkeit. Im Folgenden ist unter $g_{\mu\nu}$ der metrische Tensor der Robertson-Walker-Metrik und unter $g^{\mu\nu}$ dessen Inverses zu verstehen.

a) Bestimmen Sie die Komponenten des Tensors im Ruhesystem der Flüssigkeit. Machen Sie sich die physikalische Bedeutung der einzelnen Komponenten klar.

b) Bestimmen Sie die Spur $T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ und die Komponenten des modifizierten Tensors $T_{\mu\nu}^* = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T$ in dem in der Vorlesung verwendeten kosmologischen Koordinatensystem $(t, r, \vartheta, \varphi)$.

c) Folgern Sie aus den Einsteinschen Feldgleichungen die in der Vorlesung angegebenen Gleichungen

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2qc^2 &= 4\pi G \left(\sigma - \frac{p}{c^2} \right) a^2 \\ (\beta) \quad 3\ddot{a} &= -4\pi G \left(\sigma + 3\frac{p}{c^2} \right) a \end{aligned}$$

mit der Newtonschen Gravitationskonstanten G .

Aufgabe 2: De-Sitter-Metrik (freiwillig schriftlich 10 Punkte)

Die De-Sitter-Metrik wird beschrieben durch das Längenelement

$$ds^2 = c^2 dt^2 - e^{2ct/l} (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

mit einer Konstanten l .

a) Zeigen Sie, dass die De-Sitter-Metrik ein Spezialfall der Robertson-Walker-Metrik ist. Wie lauten die Parameter q und $a(t)$?

b) Bestimmen Sie aus der Einstein-Gleichung und dem Energiesatz die Dichte σ und den Druck p in einem De-Sitter-Universum.