Arbeitsblatt 02

12/13.11.2020

In diesem Blatt frischen wir noch einmal Schulstoff auf. Es werden Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen untersucht, sowie verschiedene Arten von Integralen gelöst und Vektorrechnung wiederholt, aber auch etwas erweitert.

Aufgabe 1: Trigonometrische Funktionen (10 Punkte)

(a) Drücken Sie folgende Funktionen in Abhängigkeit von $\sin\Theta$ aus ($\Theta \in [0, 2\pi[$):

$$\cos^2\Theta,\ \cos\Theta,\ \tan\Theta,\ \cot\Theta.$$

(b) Drücken Sie folgende Funktionen in Abhängigkeit von $\tan\Theta$ aus ($\Theta \in [0, 2\pi[$):

$$\frac{\sin\Theta}{\cos\Theta},\ \frac{1}{\cos^2\Theta},\ \cos\Theta,\ \sin\Theta.$$

(c) Gegeben sei $\sin\Theta = \frac{3}{5}$. Bestimmen Sie mittels der Ergebnisse von (a) welche Werte $\tan\Theta$ und $\cos\Theta$ annehmen können.

(d) Gegeben sei $\tan\Theta = -\frac{5}{12}$. Bestimmen Sie die möglichen Werte von $\sin\Theta$ und $\cos\Theta$.

(e) Faktorisieren Sie die folgenden Funktionen:

$$\sin^2\Theta - \sin\Theta\cos\Theta,\ \sin^2\Theta + \sin^2\Theta\cos^2\Theta,$$
$$\sin^3\Theta\cos^2\Theta - \sin^2\Theta\cos^3\Theta + \sin\Theta\cos^2\Theta,\ \sin^4\Theta - \cos^4\Theta.$$

(f) Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen.

$$\sin^2\Theta(1+\cot^2\Theta),\ \frac{\sin^2\Theta}{\cos^2\Theta} - \frac{1}{\cos^2\Theta},\ (\sin\Theta+\cos\Theta)^2 + (\sin\Theta-\cos\Theta)^2$$

(g) Vereinfachen Sie weitere Funktionen:

$$\tan^2\Theta\cos^2\Theta + \cot^2\Theta\sin^2\Theta,\ \tan\Theta + \frac{\cos\Theta}{1+\sin\Theta}.$$

(h) Zeigen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$\frac{2}{\sin\Theta} = \frac{\sin\Theta}{1+\cos\Theta} + \frac{1+\cos\Theta}{\sin\Theta}.$$

Aufgabe 2: Bestimmte und unbestimmte Integrale (10 Punkte)

Bestimmen Sie folgende Integrale:

(a)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x,$$

(b)
$$\int_0^1 (3x^2 - 1)\mathrm{d}x,$$

(c)
$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cos(x^2)\mathrm{d}x,$$

(d)
$$\int \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x,$$

(e)
$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x,$$

(f)
$$\int x\cos x \,\mathrm{d}x,$$

(g)
$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}\mathrm{d}x,$$

(h)
$$\int_0^{b/a} \frac{x^2}{ax+b}\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 3: Vektorrechnung (10 Punkte)

Betrachten Sie

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3,\\ \vec{b} &= 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3,\\ \vec{c} &= -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,\end{aligned}$$

wobei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ eine Orthonormalbasis ist, d.h. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ mit dem Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j,\\ 1 & \text{für } i = j.\end{cases}$$

Berechnen Sie

(a) $|\vec{a}|$,

(b) den Einheitsvektor $\vec{u}$ parallel zu $\vec{a}$,

(c) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$,

(d) $|2\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}|$,

(e) das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$,

(f) den Winkel zwischen $-\vec{b}$ und $\vec{c}$,

(g) das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$,

(h) ob $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ linear unabhängig sind.