Arbeitsblatt 04

26/27.11.2020

Auf diesem Blatt werden verschiedene Arten von Integralen betrachtet. Zunächst werden partielle Integration und Substitution wiederholt. Diese Techniken werden dann auf das Gauss-Integral angewandt. Zuletzt werden Linienintegrale behandelt.

Aufgabe 1: Substitution und partielle Integration (10 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\int_0^\infty y \exp(-3y)\, \mathrm{d}y$,

(b) $\int_{1/3}^1 \frac{8}{3x^2}\, \mathrm{d}x$,

(c) $\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \sin(2x^2)\, \mathrm{d}x$,

(d) $\int_a^b 3x^2 \sin(x)\, \mathrm{d}x$,

(e) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x$,

(f) $\int \tan x\, \mathrm{d}x$,

(g) $\int \frac{\ln(2\ln z)}{z}\, \mathrm{d}z$,

(h) $\int \frac{\ln(1/x)}{x}\, \mathrm{d}x$.

Aufgabe 2: Gauß-Integrale (10 Punkte)

Das Gauß-Integral hat den Wert

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left(-\lambda x^2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

(a) Nutzen Sie geschickte Ableitungen von $F(\lambda)$ um die folgenden Integrale zu erhalten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; x^2 \exp\left(-x^2\right), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\; x^4 \exp\left(-x^2\right).$$

Schließen Sie daraus auf den Wert des Integrals von $-\infty$ bis ∞ über $x^{2n}\exp(-x^2)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\; x^{2n+1} e^{-x^2} = \frac{n!}{2}$$

gilt. Hinweis: vollständige Induktion.

Aufgabe 3: Linienintegrale **(10 Punkte)**

Das Linienintegral einer Vektorfunktion ist definiert als

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \, \mathrm{d}t.$$

Bestimmen Sie das Linienintegral

(a) für die Vektorfunktion $\vec{f}(x, y, z) = (x, 3xy, -(x + z))$ mit dem direkten Pfad von $(1, 4, 1)$ nach $(0, 5, 2)$ und dem Pfad $\vec{r}_2(t) = (1 - t^2, 4 + t^2, 1 + t^2)$, $0 \leq t \leq 1$,

(b) für die Vektorfunktion $\vec{f}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ und die Pfade

$$\vec{r}_1(t) = \begin{cases} (t, t, t^2) & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ (2 - t, 2 - t, 2 - t) & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

und $\vec{r}_2(t) = (e^t \sin(t), e^{-t} \sin(t), 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) für die Vektorfunktion $\vec{f}(x, y, z) = (xy^2 + z, x^2y + 2, x)$ von (c, c, h) nach $(2c, c/2, h)$ auf den Pfaden gegeben durch $\vec{r}_1 : x = ct,\ y = c/t, z = h,\ \vec{r}_2 : 2y = 3c - x, z = h.$

(d) Wenn eine Vektorfunktion aus einer Skalarfunktion V mittels eines Gradienten gewonnen werden kann, d.h. $\vec{f} = -\vec{\nabla} V$, dann ist das Linienintegral wegunabhängig. Das bedeutet, dass es nur von Anfangs- und Endpunkt, nicht jedoch von dem gewählten Weg zwischen diesen Punkten abhängt. Für welche der obigen Vektorfunktionen ist das Linienintegral wegunabhängig? Freiwillige Zusatzaufgabe: bestimmen Sie für den Fall wegunabhängiger Linienintegrale die zugehörigen Skalarfunktionen V mit $\vec{f} = -\vec{\nabla} V$.